SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Josip Grgurić

REPREZENTACIJE SIMPLEKTIČKIH LIEJEVIH ALGEBRI

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof.dr.sc. Pavle Pandžić

Zagreb, rujan 2015

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Cilj ovog rada je iznijeti osnovne činjenice o strukturi i reprezentacijama poluprostih Liejevih algebri s posebnim naglaskom na simplektičku algebru ranga 2.
Polazi se od pojma Liejeve grupe. Liejeve grupe početno su zamišljene kao alat za rješavanje nekih PDJ. Često iskrsavaju u drugim granama matematike, fizici i kemiji i zato je od važnosti razumjeti njihovu strukturu i reprezentacije.
Liejeve algebre tu nastupaju kao pomoć. Iako čisto algebarski objekti, sadrže u sebi informacije o geometriji i topologiji Liejevih grupa. Pokazuje se da je dovoljno i svakako jednostavnije proučavati Liejeve algebre i iz toga izvoditi zaključke o Liejevim grupama. Štoviše, ako su poznate reprezentacije kompleksnih Liejevih algebri, bit će poznate i reprezentacije realnih. Zbog jednostavnije strukture, pažnja se usmjeruje na kompleksne algebre.
Problem se dalje može reducirati na izučavanje poluprostih kompleksnih algebri. Među njima je najjednostavnija Liejeva algebra $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ i pokazuje se da odigrava važnu ulogu u razumijevanju strukture i reprezentacija općenitih poluprostih kompleksnih algebri. One, pak, imaju brojna lijepa svojstva (jedno od kojih je potpuna reducibilnost, svojstvo koje dijeli s konačnim i kompaktnim grupama), a postoje i jednostavni kriteriji za utvrđivanje je li dana Liejeva algebra poluprosta. Simplektičke Liejeve algebre čine jednu vrstu takvih.

Rad smo organizirali na sljedeći način.
U prvom poglavlju definiramo realne i kompleksne Liejeve grupe i dajemo nekoliko primjera.
U drugom poglavlju definiramo Liejeve algebre i iz navedenih primjera Liejevih grupa konstruiramo njihove Liejeve algebre. Uvodimo eksponencijalno preslikavanje i pomoću njega objašnjavamo vezu između reprezentacija Liejevih grupa i induciranih reprezentacija njihovih Liejevih algebri. Na kraju poglavlja dajemo klasifikaciju Liejevih algebri i uvodimo pojam poluprostih Liejevih algebri, kojima se bavimo u ostatku rada.
Treće poglavlje započinje diskusijom o Liejevoj algebri $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ i opisom njezinih ireducibilnih konačnodimenzionalnih reprezentacija. Koristeći dobivene rezultate, proučavamo strukturu i reprezentacije proizvoljne kompleksne poluproste Liejeve algebre.
Posljednje dvije sekcije posvećene su simplektičkim algebrama. Najprije se iznose osnovne činjenice o strukturi simplektičke algebre ranga n i na kraju opisuju neke konačnodimenzionalne reprezentacije simplektičke algebre $\mathfrak{sp}_4\mathbb{C}$.

Poglavlje 1

Liejeve grupe

Definicija 1.0.1. *Liejeva grupa je grupa koja je ujedno i glatka monogostrukost. K tome su još operacije množenja i invertiranja glatke funkcije (ekvivalentno, operacija sa $G \times G \to G$ dana sa $(x, y) \longmapsto x^{-1}y$ je glatka funkcija).*

Realne Liejeve grupe su realne mnogostrukosti, a kompleksne Liejeve grupe su kompleksne mnogostrukosti.
Morfizam realnih (kompleksnih) Liejevih grupa je homomorfizam grupa koji je i glatko (holomorfno) preslikavanje.
Liejevu podgrupu Liejeve grupe definiramo kao zatvorenu podmnogostrukost koja je i podgrupa.

1.1 Realne Liejeve grupe

Najjednostavniji primjeri realnih Liejevih grupa su $\mathbb{R}$ sa zbrajanjem i $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. U oba slučaja operacije množenja i invertiranja svode se na operacije zbrajanja i oduzimanja u $\mathbb{R}$, što su glatke funkcije.

Osnovni primjer realne Liejeve grupe je opća linearna grupa $GL_n\mathbb{R}$ invertibilnih realnih $n \times n$ matrica sa diferencijabilnom strukturom nasljeđenom iz $\mathbb{R}^{n^2}$. Množenje matrica je funkcija sa $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^n$ čije su koordinatne funkcije polinomi, a to je očito glatka funkcija. Determinanta je također glatka funkcija pa iz Cramerove formule za inverz slijedi da je invertiranje glatko. Većina realnih Liejevih grupa definirane su kao podgrupe od $GL_n\mathbb{R}$.

Tako imamo specijalnu linearnu grupu $SL_n\mathbb{R}$ kao grupu automorfizama (ili invertibilnih realnih $n \times n$ matrica od $\mathbb{R}^n$ sa determinantom jednakom 1.

Da je $SL_n\mathbb{R}$ zatvoren podskup od $GL_n\mathbb{R}$ slijedi iz neprekidnosti funkcije determinante $\det : M_n\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Zatim definiramo grupu gornjetrokutastih matrica B_n, ili ekvivalentno grupu automorfizama od $\mathbb{R}^n$ koje čuvaju sljedeći niz potprostora:

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{R}^n$$

gdje je V_i potprostor razapet vektorima kanonske baze $e_1, \ldots, e_i$. (Napomenimo da odabir drugačije baze definira drugu podgrupu.)

Slično, definiramo grupu gornjetrokutastih matrica N_n sa jedninicama na dijagonali, odnosno grupu automorfizama od $\mathbb{R}^n$ koji čuvaju gornji niz potprostora i djeluju kao identiteta na kvocijentima V_{i+1}/V_i

Nadalje, za danu simetričnu bilinearnu formu Q na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ možemo definirati grupu automorfizama od $\mathbb{R}^n$ determinante 1 koji čuvaju Q.
Ako je Q još pozitivno definitna, dobivamo specijalnu ortogonalnu grupu $SO_n\mathbb{R}$. Ako je Q indefinitna i signature (p, q), dobivamo grupu $SO(p,q)$. Ako je Q antisimetrična i nedegenerirana, dobivamo simplektičnu grupu $Sp_n\mathbb{R}$.
Bilinearnu formu Q možemo reprezentirati matricom M, tj. imamo

$$Q(x,y) = {}^t x \cdot M \cdot y, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$$

Tada uvjet

$$Q(Ax, Ay) = Q(x,y)$$

prelazi u uvjet

$${}^t x \cdot {}^t A \cdot M \cdot A \cdot y = {}^t x \cdot M \cdot y, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$$

što je ekvivalentno sa

$${}^t A \cdot M \cdot A = M$$

Naprimjer, ako za M uzmemo jediničnu matricu, što znači da je Q simetrična i pozitivno definitna, vidimo da je grupa $SO_n\mathbb{R}$ skup svih matrica A determinante 1 takvih da je ${}^t A = A^{-1}$.
Napomenimo da u slučaju simplektičke grupe $Sp_n\mathbb{R}$, antisimetričnost od Q povlači antisimetričnost od M, a nedegeneriranost od Q povlači regularnost od M.
Kako je prema Jacobijevom teoremu antisimetrična matrica neparne dimenzije nužno singularna, n je nužno paran.
Također, suvišno je zahtijevati da simplektičke matrice imaju determinantu 1, što ćemo

kasnije i dokazati.
S druge strane, zahtjev je nužan u slučaju $SO_n\mathbb{R}$. U protivnom dobivamo grupu koju označavmo sa $O_n\mathbb{R}$ i koja ima dvije komponente povezanosti: podgrupu $O_n^+\mathbb{R} = SO_n\mathbb{R}$ matrica determinante 1 i podskup $O_n^-\mathbb{R}$ matrica determinante -1.

Sljedeći primjer je unitarna grupa $U(n)$ svih kompleksnih automorfizama n -dimenzionalnog kompleksnog vektorskog prostora V koji čuvaju pozitivno definitni Hermitski skalarni produkt H na V. (Hermitska forma je antilinearna u prvoj varijabli i linearna u drugoj i vrijedi $H(x, y) = \overline{H(y, x)}$). Kao i ranije možemo pisati

$$H(x, y) = {}^t\overline{x} \cdot M \cdot y, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{C}^n$$

za neku hermitsku matricu M. Tada je $U(n)$ grupa svih $n \times n$ kompleksnih matrica A takvih da je

$${}^t\overline{A} \cdot M \cdot A = M$$

Posebno, za $M = I$ grupa $U(n)$ je grupa svih unitarnih matrica.

Sljedeći primjer je, specijalna unitarna grupa $SU(n)$, podgrupa od $U(n)$ automorfizama determinante 1.

Od navedenih grupa kompaktne su $O_n\mathbb{R}$, $SO_n\mathbb{R}$, $SO(p, q)$, $U(n)$ i $SU(n)$.

Definicija 1.1.1. *Reprezentacija realne Liejeve grupe G je morfizam Liejevih grupa G i* $GL_n\mathbb{R}$.

1.2 Kompleksne Liejeve grupe

Osnovni primjer je $GL_n\mathbb{C}$, grupa automorfizama od $\mathbb{C}^n$. Nju možemo shvatiti i kao realnu Liejevu grupu $GL_{2n}\mathbb{R}$.
Slično, grupe $SO_n\mathbb{C}$ i $Sp_{2n}\mathbb{C}$ automorfizama n -dimenzionalnog kompleksnog vektorskog prostora determinante 1 koje čuvaju simetričnu i antisimetričnu nedegeneriranu bilinearnu formu možemo shvatiti kao kompleksne i realne.
Općenito, vrijedi da su sve nedegenerirane bilinearne simetrične forme na kompleksnom prostoru izomorfne pa je grupa $SO_n\mathbb{C}$ jedinstvena do na konjugiranje.

Od navedenih kompleksnih Liejevih grupa nijedna nije kompaktna jer nijedna grupa nije omeđena. Također je to direktna posljedica činjenice da je svaka kompaktna kompleksna Liejeva grupa komutativna, za što ćemo kasnije dati skicu dokaza.

Od poznatih Liejevih grupa sljedećim konstrukcijama dobivamo nove primjere Liejevih grupa.
Ponajprije, Liejeva podgrupa grupe G je i sama Liejeva grupa. Zatim, kvocijent Liejeve grupe i svake njezine Liejeve podgrupe je također Liejeva grupa.
Direktan produkt Liejevih grupa je Liejeva grupa. To slijedi iz toga što je produkt diferencijabilnih mnogostrukosti opet diferencijabilna mnogostrukost, a novodefinirane operacije množenja i invertiranja ostaju diferencijabilne.
Nadalje, može se pokazati da se na svakoj povezanoj mnogostrukosti H koja je i prostor natkrivanja neke Liejeve grupe G može definirati operacija množenja s kojom H postaje Liejeva grupa. Preciznije, za svaki element e' koji leži nad jedinicom grupe G postoji jedinstvena struktura Liejeve grupe na H takva da je e' jedinica od H i da je projekcija natkrivanja sa H u G morfizam Liejevih grupa H i G.

Definicija 1.2.1. *Reprezentacija kompleksne Liejeve grupe G je morfizam Liejevih grupa G i* $GL_n\mathbb{R}$.

Poglavlje 2

Liejeve algebre

Dokažimo jednu činjenicu koju ćemo kasnije koristiti:

Napomena 2.0.2. *Ako je G povezana Liejeva grupa i $U \subset G$ okolina identitete, tada U generira G.*

Naime, definiramo skup

$$S = \left\{ \prod_{i=1}^{n} g_i^{\pm 1} : g_1, \ldots, g_n \in U,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Očito je S neprazan. Također, za $g \in S$ vrijedi $gU \subset S$. Kako je gU otvorena okolina od g, slijedi da je S otvoren. Štoviše, primijetimo da je $gU \cap S = \emptyset$ čim $g \notin S$. Zaista, ako je $gu = \prod g_i$, gdje su $u \in U$ i $g_i \in U \cap U^{-1}$, tada je $g = (\prod g_i)\, u^{-1} \in S$, a to je kontradikcija. No to znači da je $G \setminus S$ otvoren pa zbog povezanosti od G zaključujemo $S = G$.

Kao što smo već definirali, morfizam Liejevih grupa $\rho : G \to H$ je C^∞ funkcija takva da

$$\rho(gh) = \rho(g) \cdot \rho(h),\ \forall\, g, h \in G$$

Lako se vidi da vrijedi

$$\rho \Psi_g = \Psi_{\rho(g)} \cdot \rho$$

gdje je $\Psi_g : G \to G$ konjugacija sa g. Uzimanjem diferencijala od Ψ_g u identiteti $\forall g \in G$

$$\mathrm{Ad}(g) = (d\Psi_g)_e : T_e G \to T_e G$$

dobivamo reprezentaciju

$$\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(T_e G)$$

koju zovemo adjungirana reprezentacija grupe G. Zaista, neka je $\gamma : I \to G$ parametrizirana krivulja takva da je $\gamma(0) = e, \gamma'(0) = X \in T_eG$. Tada je

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(gh)(X) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\Psi(gh) \circ \gamma)(t) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\Psi(gh) \circ \Psi(h) \circ \gamma)(t) \\
&= \mathrm{d}\Psi(g) \circ (\Psi(h) \circ \gamma)(0)\mathrm{d}\Psi(h) \circ \gamma(0)\gamma^{'}(0) \\
&= (\mathrm{d}\Psi(g))_e(\mathrm{d}\Psi(h))_e(X) \\
&= \mathrm{Ad}(g)\mathrm{Ad}(h)(X).
\end{aligned}$$

Iz relacije

$$\rho\Psi_g = \Psi_{\rho(g)} \cdot \rho$$

dobivamo

$$(\mathrm{d}\rho)_e\mathrm{Ad}(g) = \mathrm{Ad}_{\rho(g)}(\mathrm{d}\rho)_e.$$

Neka je opet $\gamma : I \to G$ parametrizirana krivulja takva da je $\gamma(0) = e, \gamma'(0) = X \in \mathfrak{g}$. Slijedi

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\mathrm{d}\rho)_e(\mathrm{Ad} \circ \gamma)(t) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\mathrm{Ad} \circ \rho \circ \gamma)(t)(\mathrm{d}\rho)_e,$$

to jest

$$(\mathrm{d}\rho)_e(\mathrm{dAd})_e(X) = (\mathrm{dA}_e)(\mathrm{d}\rho)_e(X)(\mathrm{d}\rho)_e.$$

Označimo $(\mathrm{dAd})_e$ sa ad. Dolazimo tako do linearnog preslikavanja

$$\mathrm{ad} : T_eG \to \mathrm{End}(T_eG)$$

i jednakosti

$$(\mathrm{d}\rho)_e(\mathrm{ad}(X)(Y)) = \mathrm{ad}((\mathrm{d}\rho)_e(X))((\mathrm{d}\rho)_e(Y)).$$

Preslikavanje ad možemo shvatiti i kao bilinearno preslikavanje sa $T_eG \times T_eG \to T_eG$ pa uvodimo notaciju

$$[X, Y] \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{ad}(X)(Y), \quad \forall\, X, Y \in T_eG.$$

Dakle, ako je ρ homomorfizam Liejevih grupa G i H, vrijedi

$$(\mathrm{d}\rho)_e([X, Y]) = [(\mathrm{d}\rho)_e(X), (\mathrm{d}\rho)_e(Y)], \quad \forall\, X, Y \in T_eG.$$

U slučaju da je G opća linearna grupa $GL_n\mathbb{R}$, za preslikavanje ad imamo eksplicitnu formulu. Neka su X, Y iz $T_eG = \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$. Ako je $\gamma : I \to G$. parametrizirana krivulja takva da je $\gamma(0) = e$ i $\gamma^{'}(0) = X$, imamo

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= \mathrm{ad}(X)(Y) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\mathrm{Ad}(\gamma(t))(Y)) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \gamma(t)Y\gamma(t)^{-1} \\
&= \gamma^{'}(0) \cdot Y \cdot \gamma(0) + \gamma(0) \cdot Y \cdot (-\gamma(0)^{-1} \cdot \gamma^{'}(0) \cdot \gamma(0)^{-1}) \\
&= X \cdot Y - Y \cdot X.
\end{aligned}$$

Izraz za

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \gamma(t)Y\gamma(t)^{-1}$$

dobivamo iz jednakosti $\gamma(t)\gamma(t)^{-1} = e$ i pravila za derivaciju produkta.

Dokazuje se da za komutator vrijedi $[X, Y] = -[Y, X]$, kao i Jacobijev identitet

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Mi ćemo to učiniti samo za matrični komutator. Svojstvo antisimetričnosti je očito. Za X, Y i Z iz $\mathfrak{g}$ imamo

$$\begin{aligned}
[X, [Y, Z]] &= XYZ - XZY - YZX + ZYX \\
[Y, [Z, X]] &= YZX - YXZ - ZXY + XZY \\
[Z, [X, Y]] &= ZXY - ZYX - XYZ + YXZ.
\end{aligned}$$

Zbrajanjem jednakosti, svi se članovi pokrate, što pokazuje Jacobijev identitet.

Sada definiramo Liejevu algebru kao vektorski prostor $\mathfrak{g}$ zajedno sa antisimetričnim bilinearnim preslikavanjem $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ koje zadovoljava Jacobijev identitet.

Homomorfizam Liejevih algebri je linearan operator A vektorskih prostora koji čuva komutator, to jest za koji vrijedi

$$A([X, Y]) = [A(X), A(Y)], \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je realna, odnosno kompleksna ako je $\mathfrak{g}$ realan, odnosno kompleksan vektorski prostor. Ako je $\mathfrak{g}$ realna Liejeva algebra, kompleksnu Liejevu algebru $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$, čiji je komutator od proširen po linearnosti zovemo kompleksifikacijom od $\mathfrak{g}$. Drugim riječima, kompleksifikacija od $\mathfrak{g}$ je vektorski prostor $\mathfrak{g} + i\mathfrak{g}$ sa komutatorom

$$[X + iY, X^{'} + iY^{'}] = [X, X^{'}] - [Y, Y^{'}] + i([X, Y^{'}] + [X^{'}, Y]), \quad \forall\, X, Y, X^{'}, Y^{'} \in \mathfrak{g}.$$

Reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorskom prostoru V je homomorfizam Liejevih algebri $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Ako je V kompleksan vektorski prostor, ρ zovemo kompleksnom reprezentacijom Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Ako je $\mathfrak{g}$ realna Liejeva algebra i V realan vektorski prostor, ρ zovemo realnom reprezentacijom (realne) Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Vidjeli smo da ako je $\rho : G \to H$ morfizam Liejevih grupa, tada je $(\mathrm{d}\rho)_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ homomorfizam pripadnih Liejevih algebri. Ovdje smo označili $\mathfrak{g} = T_eG$, $\mathfrak{h} = T_eH$.
Posebno, ako je $\Pi : G \to GL(V)$ reprezentacija Liejeve grupe G, tada je $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ definirana sa $\pi = (d\Pi)_e$ reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i zovemo je inducirana reprezentacija od Π.
Za potprostor $W < V$ kažemo da je Π – invarijantan ako je $\Pi(G)W \subset W$.
Za Π kažemo da je ireducibilna reprezentacija od G ako V ne sadrži Π – invarijantnih potprostora osim 0 i W. Neka su sada $\Pi_i : G \to GL(V_i)$, $i = 1, \cdots, n$ reprezentacije Liejeve grupe G, pri čemu su $V_1, \cdots, V_k$ vektorski prostori nad istim poljem. Direktnu sumu reprezentacija $\Pi_i, \cdots, \Pi_k$ definiramo kao reprezentaciju Π od G na vektorskom prostoru $V = \bigoplus V_i$ formulom

$$\Pi(g) = \bigoplus \Pi_i(g), \quad \forall g \in G.$$

Ako su $\Pi_1 : G \to GL(V)$ i $\Pi_2 : G \to GL(W)$ dvije reprezentacije Liejeve grupe G, definiramo tenzorski produkt Π_1 i Π_2 na prostoru $V \otimes W$ formulom

$$\Pi_1 \otimes \Pi_2(g)(v \otimes w) = \Pi_1(g)(v) \otimes \Pi_2(g)(w), \quad \text{za svaki } g \in G \quad \text{i} \quad v \otimes w \in V \otimes W.$$

Kažemo da su Π_1 i Π_2 ekvivalentne ako postoji izomorfizam $\Phi : V \to W$ takav da je $\Phi \circ \Pi_1(g) = \Pi_2(g) \circ \Phi$. Operator Φ zovemo operator preplitanja.

Često ćemo djelovanje operatora $\Pi(g)$ na vektor v označavati $g.v$.
Definicije su analogne u slučaju reprezentacija Liejevih algebri.

Neka je $X \in \mathfrak{g}$ proizvoljan i $\gamma : I \to G$ parametrizirana krivulja takva da je $\gamma(0) = e$ i $\gamma^{'}(0) = X$. Inducirano djelovanje elementa X na vektor $v \in V$ je po definiciji

$$X(v) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \gamma_t(v).$$

Analogno, inducirano djelovanje elementa X na $v \otimes w$ je

$$X(v \otimes w) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\gamma_t(v) \otimes \gamma_t(w)) = \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \gamma_t(v)\right) \otimes w + v \otimes \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \gamma_t(w)\right).$$

Dakle je

$$X(v \otimes w) = X(v) \otimes w + v \otimes X(w)$$

Posebno, ako je V reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, tada je djelovanje $X \in \mathfrak{g}$ na $v \cdot w \in \operatorname{Sym}^2 V$ dano sa

$$X.v \cdot w = X.v \cdot w + v \cdot X.w. \tag{2.1}$$

Analogna formula vrijedi i za vanjski produkt.

Simetričnu bilinearnu formu Q na V možemo shvatiti kao element od $\operatorname{Sym}^2 V^*$.
Zaista, iz univerzalnog svojstva tenzorskog produkta $V^* \otimes W$ slijedi postojanje linearnog operatora $\Phi : V^* \otimes W \to \operatorname{Hom}(V, W)$ takvog da $\Phi(f \otimes w)(v) = f(v)w$. Neka je $A \in \operatorname{Hom}(V, W)$ proizvoljan, $e = \{v_1, \cdots, v_n\}$ baza za V, a $f = \{w_1, \cdots, v_m\}$ baza za W. Lako se vidi da je

$$A = \Phi\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j^* \otimes w_i\right), \tag{2.2}$$

gdje je $(a_{ij})_{ij}$ matrični prikaz od A u bazama e i f, a $\{v_1^*, \cdots, v_n^*\}$ dualna baza od e. Uspoređujući dimenzije domene i kodomene, zaključujemo da je Φ izomorfizam vektorskih prostora $V^* \otimes W$ i $\operatorname{Hom}(V, W)$.
Sada na bilinearnu formu Q možemo gledati kao na preslikavanje koje vektoru $v \in V$ pridruži funkcional $Q(v, \cdot) \in V^*$. Štoviše, svako takvo preslikavanje je bilinearna forma na V. Primjenom gornjeg izomorfizma na vektorske prostore V i V^*, Q postaje element $V^* \otimes V^*$. Imamo da je bilinearna forma $Q = \Sigma\, f_i \otimes g_i$ simetrična ako i samo ako je $Q = \Sigma\, f_i \otimes g_i = \Sigma\, g_i \otimes f_i$, što povlači da je prostor simetričnih bilinearnih formi izomorfan prostoru $\operatorname{Sym}^2 V^*$.
Analogno tome, antisimetričnu bilinearnu formu na V shvaćamo kao element od $\Lambda^2 V^*$.

Neka je $\Pi : G \to GL(V)$ reprezentacija grupe G i $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ inducirana reprezentacija Liejeve algebre. Definiramo njoj dualnu reprezentaciju $\Pi^* : G \to GL(V^*)$ sa $\Pi^*(\mathfrak{g}) = (\Pi(\mathfrak{g}^{-1}))^*$. Uzimajući diferencijal u jedinici od Π^*, dolazimo do dualne reprezentacije $\pi^* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V^*)$ dane formulom

$$\pi^*(X) = -(\pi(X))^* : V^* \to V^*.$$

Reći da je forma Q invarijantna na reprezentaciju Π grupe G na vektorskom prostoru V je ekvivalentno tome da reprezentacija $\mathrm{Sym}^2\Pi^*$ fiksira Q kao element Sym^2V^*. Zaista, neka je

$$Q = \sum_i f_i \cdot g_i \ \in \ \mathrm{Sym}^2V^*.$$

Imamo

$$\begin{aligned}
Q(x,y) &= Q\left(\Pi(g)x, \Pi(g)y\right) \\
&= \sum_i f_i(\Pi(g)x)\, g_i\left(\Pi(g)y\right) \\
&= \sum_i \Pi^*(g)(f_i)(x)\, \Pi^*(g)(g_i)(y) \\
&= \mathrm{Sym}^2\Pi^*(g)\left(\sum_i f_i \cdot g_i\right)(x,y) \\
&= \mathrm{Sym}^2\Pi^*(g)\,(Q)(x,y) \quad \forall g \in G, \quad \forall x, y \in V.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Neka je $\gamma : I \to G$, $\gamma(0) = e$, $\gamma'(0) = X$ kao i ranije. Neka su $f, g \in V^*$, $f \cdot g \in \mathrm{Sym}^2V^*$. Iz (2.1) i (2.3) slijedi

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Pi^*(\gamma(t))\,(f \cdot g) = \pi^*(X)(f) \cdot g + f \cdot \pi^*(X)(g), \tag{2.4}$$

a odatle je

$$Q(v, X.w) + Q(X.v, w) = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall v, w \in V.$$

Navedimo dvije činjenice koje ćemo kasnije korstiti.

Napomena 2.0.3. *Neka je V reprezentacija povezane Liejeve grupe G i $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ inducirana reprezentacije pridružene Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada je $W < V$ invarijantan s obzirom na djelovanje od G ako i samo ako je invarijantan s obzirom na djelovanje od $\mathfrak{g}$. Posebno, V je ireducibilna nad G ako i samo ako je ireducibilna nad $\mathfrak{g}$.*

Dokaz odgađamo za kasnije.

Napomena 2.0.4. *Vrijedi i sljedeće: ako je $\mathfrak{g}$ realna Liejeva algebra, i $\mathfrak{g}_C$ njezina kompleksifikacija, tada se svaka kompleksna konačnodimenzionalna reprezentacija V od $\mathfrak{g}$ može na jedinstven način proširiti do kompleksno linearne reprezentacije $\mathfrak{g}_C$. Štoviše, $W < V$ je $\mathfrak{g}$ - invarijantan ako i samo ako je $\mathfrak{g}_C$ - invarijantan.*

Zaista, ako je $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ kompleksna reprezentacija realne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, proširenje do $\mathfrak{g}_C$ zbog zahtjeva linearnosti nužno je dano formulom

$$\rho(X + iY) = \rho(X) + i\rho(Y),$$

a to dokazuje egzistenciju i jedinstvenost. Pretpostavimo da je W $\mathfrak{g}$-invarijantan potprostor od V. Imamo

$$\rho(\mathfrak{g} + i\mathfrak{g})(W) = \rho(\mathfrak{g})(W) + i\rho(\mathfrak{g})(W) \subset W + iW \subset W$$

Obratno, ako je $W < V$ $\mathfrak{g}_C$-invarijantan, pogotovo je onda $\mathfrak{g}$-invarijantan zbog $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_C$.

2.1 Primjeri Liejevih algebri

Primjeri Liejevih grupa koje smo naveli bile su podgrupe od $GL_n\mathbb{R}$ odnosno $GL_n\mathbb{C}$. Zato će pridružene Liejeve algebre biti potprostori od $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$, odnosno $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$.

Promatrajmo najprije $SL_n\mathbb{R}$. Neka je $A : I \to SL_n\mathbb{R}$ parametrizirana krivulja u $SL_n\mathbb{R}$ takva da je $A(0) = I$ i $A^{'}(0) = X$. Tada za kanonsku bazu $\{e_1, e_2, \ldots e_n\} \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$A(t)e_1 \wedge \ldots \wedge A(t)e_n \equiv e_1 \ldots \wedge e_n.$$

Zaista, imamo

$$A(t)e_i = \sum_{k_i=1}^{n} A(t)_{k_i,i} e_{k_i}$$

i

$$\begin{aligned} A(t)e_1 \wedge \cdots \wedge A(t)e_n &= \left(\sum_{k_1=1}^{n} A(t)_{k_1,1}\, e_{k_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{k_n=1}^{n} A(t)_{k_n,n}\, e_{k_n} \right) \\ &= \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_n=1}^{n} A(t)_{k_1,1} \cdots A(t)_{k_n,n}\, e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_n}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Budući da je vanjski produkt jednak 0 čim je $e_{k_i} = e_{k_j}$ za $i \neq j$ i antisimetričan, to je

$$A(t)e_1 \wedge \cdots \wedge A(t)e_n = (\det A)\; e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n\,.$$

Derivirajući gornju jednakost u $t = 0$, dobivamo

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (A_t(e_1) \wedge \ldots \wedge A_t(e_n)) \\ &= \sum e_1 \wedge \ldots \wedge X(e_i) \wedge \ldots \wedge e_n \\ &= \sum e_1 \wedge \ldots \wedge \Big(\sum_{j=1}^{n} X_{i,j} e_j \Big) \wedge \ldots \wedge e_n \\ &= \mathrm{Tr}(X) \cdot (e_1 \wedge \ldots \wedge e_n). \end{aligned}$$

Dakle, matrica koja je tangencijalna na $SL_n\mathbb{R}$ ima trag 0. Kako je prostor matrica s tragom 0 kodimenzije 1, a $SL_n\mathbb{R}$ je nivo skup funkcije determinante (dakle ploha u $GL_n\mathbb{R}$ kodimenzije 1) zaključujemo da je $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$ skup svih matrica s tragom 0.

Neka je kao i ranije $A : I \to O_n\mathbb{R}$ parametrizirana krivulja u $O_n\mathbb{R}$ takva da $A(0) = I$, $A^{'}(0) = X$. Grupa $O_n\mathbb{R}$ čuva simetričnu bilinearnu formu Q, to jest

$$Q(A(t)(v), A(t)(w) \equiv Q(v, w), \quad \forall\, v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Derivirajući u $t = 0$ (vidi (2.4)), dobivamo

$$Q(v, X.w) + Q(X.v, w) = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall v, w \in V.$$

Ako je Q reprezentirana simetričnom n x n matricom M, to jest

$$Q(v, w) = {}^t v \cdot M \cdot w$$

onda gornji uvjet prelazi u

$${}^t X \cdot M + M \cdot X = 0.$$

U slučaju $M = I$ Liejeva algebra $\mathfrak{o}_n\mathbb{R}$ je skup svih n x n antisimetričnih matrica.

Budući da je $SO_n\mathbb{R}$ komponenta povezanosti jedinice grupe $O_n\mathbb{R}$, očito je $\mathfrak{so}_n\mathbb{R} = \mathfrak{o}_n\mathbb{R}$. Nakon identifikacije $V = \mathbb{R}^n$ sa V^* pomoću forme Q (Rieszov teorem) i posljedične identifikacije $\mathrm{End}(V) = V \otimes V^* = V \otimes V$, vidimo da Liejevu algebru $\mathfrak{so}_n\mathbb{R}$ možemo identificirati sa prostorom $\Lambda^2 V$,
Tvrdnja, naime, slijedi iz identifikacije antisimetričnih realnih n x n matrica sa antisimetričnim bilinearnim formama na V ostvarene relacijama $Q(v, w) = {}^t v \cdot X \cdot w$,, kao i već objašnjenog izomorfizma prostora antisimetričnih bilinearnih formi na V i prostora $\Lambda^2 V^*$.

Analogno računamo Liejevu algebru $\mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{R}$ simplektičke grupe $Sp_{2n}\mathbb{R}$. Kao i ranije dobivamo da je tangencijalni prostor u jedinici grupe $Sp_{2n}\mathbb{R}$ skup svih $n \times n$ matrica X za koje vrijedi

$$Q(X(v), w) + Q(v, X(w))) = 0$$

za antisimetričnu bilinearnu formu Q. Ekvivalentno, skup svih matrica X takvih da je

$$Q(X(v), w) = Q(X(w), v).$$

U terminima identifikacije V sa V^* pomoću forme Q, kao i u slučaju $\mathfrak{so}_n\mathbb{R}$ vidimo da je

$$\mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{R} = \mathrm{Sym}^2 \subset \mathrm{End}(V) = V \otimes V.$$

Zatim, Liejeva algebra $\mathfrak{u}_n$ grupe $U(n)$ automorfizama vektorskog prostora $V = \mathbb{C}^n$ koji čuvaju hermitsku formu H je skup svih matrica X takvih da

$$H(X(v), w) + H(v, X(w)) = 0, \quad \forall\, v, w \in V.$$

U slučaju da je $H(v, w) = \langle v, w \rangle$, gdje je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalarni produkt na $\mathbb{C}^n$, imamo

$$\langle Xv, w \rangle + \langle v, Xw \rangle = 0, \quad \text{za svaki } v, w \in V.$$

Odavde je $X = -X^*$, što znači da $U(n)$ čine sve antihermitske matrice.

2.2 Eksponencijalno preslikavanje

Neka je G Liejeva grupa, $\mathfrak{g}$ njezina Liejeva algebra i $X \in \mathfrak{g}$. Za $g \in G$ neka je $m_g : G \to G$ množenje elementom g slijeva.
Definiramo tangencijalno vektorsko polje na G sa $v_X(g) = (dm_g)_e(X)$.
Primijetimo da je vektorsko polje invarijatno na lijevu translaciju, to jest da je $v_X(gh) = (dm_g)_h v_X(h)$, za sve g i h iz G.
Zaista, neka je $\gamma : I \to G$ parametrizirana krivulja takva da je $\gamma(0) = e$ i $\gamma'(0) = X$. Imamo

$$\begin{aligned} v_X(gh) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (m_{gh} \circ \gamma)(t) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (m_g \circ m_h \circ \gamma)(t) \\ &= (dm_g)_h (dm_g)_e X = (dm_g)_h v_X(h). \end{aligned}$$

Iz teorema o integralnoj krivulji tangencijalnog vektorskog polja slijedi da postoji interval I i jedinstvena krivulja $\varphi : I \to G$ takva da je

$$\varphi(0) = e \quad \text{i} \quad \varphi'(t) = v_X(\varphi(t)), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Neka su $s, t \in I$, s fiksan. Stavimo

$$\alpha(t) = \varphi(s) \cdot \varphi(t)$$

i

$$\beta(t) = \varphi(s + t).$$

Vrijedi $\alpha(0) = \beta(0) = \varphi(s)$, kao i $\alpha^{'}(t) = v_X(\alpha(t))$ i $\beta^{'}(t) = v_X(\beta(t))$. Zaista, jedina netrivijalna činjenica je da je α integralna krivulja vektorskog polja v_X. To slijedi iz

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= \frac{d}{dt}(m_{\varphi(s)} \circ \varphi)(t) = (dm_{\varphi(s)})_{\varphi(t)}\varphi'(t) \\ &= (dm_{\varphi(s)})_{\varphi(t)} v_X(\varphi(t)) = v_X(\varphi(s)\varphi(t)).\end{aligned}$$

Iz tvrdnje jedinstvenosti teorema o integralnim krivuljama vektorskog polja slijedi da se α i β podudaraju na presjeku domena, odnosno na nekoj okolini nule $[-\delta, \delta]$ ($\delta > 0$). Ako u jednakosti $\varphi(s + t) = \varphi(s)\varphi(t)$ stavimo $s = \delta$, odnosno $s = -\delta$ i pustimo da t varira po $[-\delta, \delta]$, krivulja φ se jedinstveno proširuje na interval $[-2\delta, 2\delta]$.
Nastavljajući postupak, φ proširujemo do krivulje φ_X definirane na čitavom $\mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$\varphi_X^{'} = v_X(\varphi(t)), \quad \text{za svaki } t \text{ iz } \mathbb{R}.$$

Preslikavanje φ_X zovemo jednoparametarska podgrupa od G s tangencijalnim vektorom X u identiteti.
Definiramo sada eksponencijalno preslikavanje

$$\exp : \mathfrak{g} \to G \quad \text{sa} \quad \exp(X) = \varphi_X(1).$$

Definicija je dobra zbog jedinstvenosti jednoparametarskih podgrupa za dani tangencijalni vektor u identiteti. Primijetimo da je $\exp(0) = \varphi_0(1) = e$ zbog $\varphi_0 \equiv e$.
Budući da vrijedi

$$\begin{aligned}\varphi_{\lambda X}(0) &= e_G = \varphi_X(\lambda \cdot 0) \\ (\varphi(\lambda(t))^{'} &= \lambda\varphi_X^{'}(\lambda t) \\ &= \lambda v_X(\varphi_X(\lambda(t)) \\ &= v_{\lambda X}(\varphi_X(\lambda t))\end{aligned}$$

i

$$\varphi_{\lambda_X}^{'}(t) = v_{\lambda X}(\varphi_{\lambda X}(t))$$

zaključujemo $\varphi_{(\lambda X)}(t) = \varphi_X(\lambda t)$.
Neka je $X \in T_0(\mathfrak{g})$ i $X : I \to \mathfrak{g}$ parametrizirana krivulja dana formulom $X(\lambda) = \lambda X$. Očito je $X(0) = 0$ i $X^{'}(0) = X$.
Imamo

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{d}\,\dot{\exp})_e(X) &= \frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} \exp(\lambda X) = \frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} \varphi_{\lambda X}(1) \\
&= \frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} \varphi(\lambda) = \varphi^{'}(0) = v_X(e) = X.
\end{aligned}
$$

Prema tome, diferencijal eksponencijalnog preslikavanja u jedinici je identiteta, posebno izomorfizam. Za morfizam Liejevih grupa $\psi : G \to H$ vrijedi jednakost

$$\varphi_{(d\psi)_e(X)} = \psi \circ \varphi_X \quad \text{za} \quad \psi : G \to H. \tag{2.6}$$

Naime, može se pokazati da je preslikavanje ϕ_X jedinstveno određeno činjenicom da je homomorfizam sa $\mathbb{R}$ u G i da je tangencijalni vektor u identiteti $\phi'_X(0)$ jednak X. Budući da je

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\psi \circ \varphi_X)(t) = (d\psi)_e \varphi'_X(0) = (d\psi)_e X,$$

jednakost slijedi.
Evaluirajući dokazanu formulu u $t = 1$, zaključujemo da je

$$\psi \circ \exp = \exp \circ\, d\psi_e \tag{2.7}$$

Iz svega navedenog slijedi da slika preslikavanja exp sadrži okolinu jedinice u G. Ako je G povezana, iz Napomene 2.0.2 slijedi da svaka okolina jedinice generira G. Budući da je morfizam Liejevih grupa jedinstveno određen vrijednostima na generatorima grupe, iz (2.6) zaključujemo da je morfizam Liejevih grupa jedinstveno određen svojim diferencijalom u jedinici.

U slučaju $G = GL_n\mathbb{R}$ možemo naći eksplicitnu formulu za eksponencijalnu funkciju. Vrijedi, naime,

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}. \tag{2.8}$$

Promatrajmo funkciju

$$\varphi_x :\ \lambda \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k X^k}{k!}.$$

Očito je $\varphi(0) = I$, a direktnim računom dobije se

$$\varphi_X^{'}(\lambda) = \varphi_X(\lambda)X = X\varphi_X(\lambda) = (\mathrm{d}m_{\varphi_X(\lambda)})_e(X).$$

Dakle, φ_x je jednoparametarska podgrupa i vrijedi $\exp(\lambda X) = \varphi_X(\lambda)$ za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$. Uvrštavajući $\lambda = 1$, vidimo da se funkcija definirana sa (2.8) podudara sa eksponencijalnom funkcijom s početka poglavlja.

Dokažimo sada Napomenu 2.0.3. Neka je $\Pi : G \to GL(V)$ konačno dimenzionalna reprezentacija povezane Liejeve grupe G i $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ inducirana reprezentacija pridružene Liejeve algebre.
Neka je $W < V$ Π -invarijantan potprostor. Tada je W invarijantan na $\Pi(\exp(tX))$, za sve $X \in \mathfrak{g}$ i $t \in \mathbb{R}$. Kako je W zatvoren potprostor od V, invarijantan je i na

$$\pi(X) = \frac{d}{dt}\Pi\,(e^{tX})\bigg|_{t=0}.$$

Obratno, neka je $W < V$ π-invarijantan potprostor i $A \in G$. Kako slika funkcije exp sadrži okolinu jedinice, a svaka okolina jedinice povezane grupe generira grupu, to postoje $X_1, \ldots, X_m \in \mathfrak{g}$ takvi da $A = \exp(X_1)\cdots\exp(X_m)$.
Sada je

$$\Pi(A) = \Pi(\exp(X_1))\cdots\Pi(\exp(X_2)) = \exp(\pi(X_1))\cdots\exp(\pi(X_2))$$

pri čemu zadnju jednakost dobivamo iz (2.7).
Iz (2.8) slijedi da je

$$\exp(\pi(X_1)) = I + \pi(X_1) + \frac{(\pi(X_1)^2}{2} + \ldots.$$

Budući da je W invarijantan na $\pi(X_1)$, zbog zatvorenosti je invarijantan i na $\exp(\pi(X_1))$.

Navedimo jedan rezultat bez dokaza.

Teorem 2.2.1. *Neka su G i H Liejeve grupe, pri čemu je G jednostavno povezana, i $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$ njihove Liejeve algebre. Linearno preslikavanje $\alpha : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ je diferencijal u jedinici nekog morfizma Liejevih grupa $A : G \to H$ ako i samo ako je α homomorfizam Liejevih algebri.*

Drugim riječima, postoji 1-1 korespodencija između homomorfizama, pa tako i reprezentacija Liejevih grupa i pridruženih Liejevih algebri.
Ova činjenica omogućuje da se umjesto reprezentacija Liejevih grupa (u slučaju kad je domena jednostavno povezana) proučavaju reprezentacije pridruženih Liejevih algebri.

Sada možemo dati skicu dokaza činjenice da je svaka kompleksna kompaktna Liejeva grupa G Abelova. Dokaz se svodi na to da se najprije pokaže da je adjungirano djelovanje od G trivijalno (slijedi iz činjenice da je holomorfno i principa maksimuma za holomorfne funkcije više varijabli). Ako sada u formulu (2.7) na mjesto morfizma ψ za proizvoljan $g \in G$ uvrstimo morfizam Ψ_g, to jest konjugaciju elementom g, vidimo da Ψ_g djeluje kao identiteta na slici od exp. A budući da slika od exp sadrži okolinu jedinice grupe, iz Napomene 2.0.2 zaključujemo da Ψ_g djeluje kao identiteta na cijeloj grupi G. A to upravo znači da je G Abelova.

2.3 Klasifikacija Liejevih algebri

Definirajmo najprije centar Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ kao potprostor svih $X \in \mathfrak{g}$ takvih da $[X, Y] = 0,$ za svaki $Y \in \mathfrak{g}$.

Za podalgebru $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ kažemo da je ideal ako je invarijantan potrprostor s obzirom na adjungiranu reprezentaciju $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Također, ako je $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ideal u $\mathfrak{g}$, onda je na kvocijentu $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ dobro definiran komutator sa $[X + \mathfrak{h}, Y + \mathfrak{h}] = [X, Y]$.

Definiramo induktivno niz podalgebri $\mathcal{D}_k\mathfrak{g}$ od $\mathfrak{g}$ sa

$$\mathcal{D}_1\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$$

$$\mathcal{D}_k\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathcal{D}_{k-1}\mathfrak{g}].$$

Za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$, kažemo da je nilpotentna ako je $\mathcal{D}_k\mathfrak{g} = 0$ za neko k.
Nadalje, definiramo niz podalgebri

$$\{\mathcal{D}^k\mathfrak{g}\} \quad \text{sa} \quad \mathcal{D}^1\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$$

$$\mathcal{D}^k\mathfrak{g} = [\mathcal{D}^{k-1}\mathfrak{g}, \mathcal{D}^{k-1}\mathfrak{g}].$$

Ako je $\mathcal{D}^k\mathfrak{g} = 0$ za neko k, Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ zovemo rješivom.
Uvedimo oznaku

$$\mathcal{D}\mathfrak{g} = \mathcal{D}_1\mathfrak{g} = \mathcal{D}^1\mathfrak{g}.$$

Koristeći Jacobijev identitet lako se dokaže da su $\mathcal{D}_k\mathfrak{g}$ i $\mathcal{D}^k\mathfrak{g}$ ideali za svaki k. Primijetimo da je Liejeva algebra rješiva ako je nilpotentna.

Nadalje, Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ bez nenul rješivih ideala zovemo poluprostom. Primijetimo da je $\mathfrak{g}$ poluprosta ako i samo ako $\mathfrak{g}$ nema nenul komutativnih ideala.
Očito je svaki komutativan ideal rješiv pa poluprosta Liejeva algebra ne može imati komutativnih ideala.
Obratno, ako je $\mathfrak{D}^k\mathfrak{h} = 0$ za neko $k > 1$, tada je $\mathfrak{D}^{k-1}\mathfrak{h}$ komutativan ideal.

Za Liejevu algebru dimenzije veće od 1 koja nema netrivijalnih ideala kažemo da je prosta. Lako se vidi da je Liejeva algebra bez netrivijalnih ideala komutativna ako i samo ako je dimenzije 1. Zaista, Liejeva algebra dimenzije 1 je očito komutativna i nema netrivijalnih ideala. Obratno, svaki potprostor razapet nenul-vektorom u komutativnoj Liejevoj algebri dimenzije veće od 1 je i netrivijalan ideal.
Posebno, proste Liejeve algebre nisu komutativne.

Ako je $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, za $\mathfrak{g}$ kažemo da je savršena.

Navedimo sada bez dokaza dva teorema koji opisuju reprezentacije rješivih Liejevih algebri.

Teorem 2.3.1 (Engelov)**.** *Neka je $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ nilpotentna podalgebra endomorfizama od V. Tada postoji nenul-vektor $v \in V$ takav da je $X.v = 0$ za sve $X \in \mathfrak{g}$.*

Primijetimo da gornja tvrdnja povlači da postoji baza za V u kojoj je matrični prikaz svakog $X \in \mathfrak{g}$ strogo gornjetrokutasta matrica. Zaista, neka je $v \in V$ kao u teoremu. Kako je span $\{v\}$ invarijantan na djelovanje od X za svaki X, dobro je definirano djelovanje od $\mathfrak{g}$ na kvocijentu $V/\text{span}\{v\}$ sa $X(v + \text{span}\{v\}) = X(v)$. Po pretpostavci indukcije na dimenziju prostora V tvrdnja vrijedi za $V/\text{span}\{v\}$. Ako je $\{v_2 + \text{span}\{v\}, \dots, v_n + \text{span}\{v\}\}$ jedna takva baza, tada je $\{v, v_2, \dots, v_n\}$ tražena baza za V.

Pomoću Engelovog teorema dokaže se Liejev teorem.

Teorem 2.3.2 (Liejev)**.** *Neka je $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}V$ kompleksna rješiva Liejeva algebra. Tada postoji nenul-vektor $v \in V$ koji je svojstven vektor od X za sve $X \in \mathfrak{g}$.*

Slično kao Engelov, Liejev teorem za posljedicu ima postojanje baze za V u kojoj je matrični prikaz svakog $X \in \mathfrak{g}$ gornjetrokutasta matrica. Prolazi potpuno isti dokaz kao i ranije.

Killingova forma Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je dana formulom

$$B(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y)).$$

Bez dokaza navodimo Cartanov kriterij koji daje dovoljne uvjete za rješivost Liejeve algebre.

Teorem 2.3.3 (Cartanov kriterij)**.** *Ako je* $\mathfrak{g}$ *podalgebra od* $\mathfrak{gl}(V)$ *i* $B(X, Y) = 0$ *za sve* X *i* $Y \in \mathfrak{g}$*, tada je* $\mathfrak{g}$ *rješiva.*

Lako se vidi da Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ ne može imati nenul-komutativnih ideala čim joj je Killingova forma nedegenerirana. Naime, neka je $\mathfrak{a}$ komutativan ideal i $X \in \mathfrak{a}$ proizvoljan. Kako je $\mathfrak{a}$ ideal, za svaki $Y \in \mathfrak{g}$ imamo

$$\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{a}.$$

Također je

$$\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y)(\mathfrak{a}) = 0, \quad \forall\, Y \in \mathfrak{g}$$

jer je $\mathfrak{a}$ komutativna podalgebra. Odavde slijedi da je

$$B(X, Y) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y)) = 0, \quad \forall\, Y \in \mathfrak{g}$$

što povlači $\mathfrak{a} \subset \ker B = 0$.
Iz Cartanovog kriterija slijedi i obrat.
Pretpostavimo, dakle, da je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra i označimo sa

$$\mathfrak{s} = \ker B = \{X \subset \mathfrak{g} : B(X, Y) = 0, \text{ za sve } Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Cartanov kriterij povlači da je $\mathrm{ad}(\mathfrak{s}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ rješiva. Budući da je $\ker \mathrm{ad} = Z(\mathfrak{g})$, a $Z(\mathfrak{g})$ je komutativan ideal u poluprostoj Liejevoj algebri pa time nul-ideal, zaključujemo da je ad injekcija. Odatle slijedi da je i $\mathfrak{s}$ rješiva. Kako poluprosta Liejeva algebra nema nenul-rješivih ideala, mora biti $\mathfrak{s} = 0$.
Time smo dokazali da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je poluprosta ako i samo ako joj je Killingova forma nedegenerirana.

Neka su $X, Y, Z \subset \mathfrak{g}$. Imamo

$$\begin{aligned} B\,([X,Y],Z) &= \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}X\ \mathrm{ad}Y\ \mathrm{ad}Z\ -\ \mathrm{ad}Y\ \mathrm{ad}X\ \mathrm{ad}Z) \\ &= \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}X\ \mathrm{ad}Y\ \mathrm{ad}Z\ -\ \mathrm{ad}X\ \mathrm{ad}Z\ \mathrm{ad}Y) \\ &= B\,(X,[Y,Z]), \end{aligned}$$

pri čemu smo koristili

$$\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA) \text{ za } A, B \in \mathrm{End}(V). \tag{2.9}$$

Sada možemo dokazati

Propozicija 2.3.4. *Neka je* $\mathfrak{a}$ *ideal u poluprostoj Liejevoj algebri* $\mathfrak{g}$ *. Tada postoji ideal* $\mathfrak{b}$ *takav da je* $\mathfrak{g}$ *direktna suma Liejevih algebri* $\mathfrak{a}$ *i* $\mathfrak{b}$.

Dokaz. Definiramo

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^{\perp} = \{X \in \mathfrak{g} : B(X,Y) = 0 \quad \text{za sve } Y \in \mathfrak{a}\}.$$

Neka su $X \in \mathfrak{a}$, $Y \in \mathfrak{b}$ i $Z \in \mathfrak{g}$ proizvoljni. Imamo

$$B(X,[Z,Y]) = B([X,Z],Y) = 0 \quad \text{zbog} \quad [X,Z] \in \mathfrak{a}.$$

Prema tome je

$$[Z,Y] \in \mathfrak{b}, \text{ za sve } Z \in \mathfrak{g}$$

što dokazuje da je $\mathfrak{b}$ ideal. Dokažimo da je $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = 0$. Uzmimo $X, Y \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, $Z \in \mathfrak{g}$.
Tada je

$$B([X,Y],Z]) = B([X,[Y,Z]] = 0. \quad \text{zbog } [Y,Z] \in \mathfrak{b} \text{ i } X \in \mathfrak{a}.$$

Ovo povlači da je $[X,Y] \in \ker B$, a kako je B nedegenerirana, to je $[X,Y] = 0$. Dakle, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ je komutativan ideal u poluprostoj Liejevoj algebri pa je nužno jednak 0. Kako su $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ ideali, za $X \in \mathfrak{a}$ i $Y \in \mathfrak{b}$ proizvoljne vrijedi $[X,Y] = 0$. Bilinearna forma B uspostavlja izomorfizam vektorskog prostora $\mathfrak{g}$ i njegovog duala. Iz definicije prostora $\mathfrak{b}$ vidimo da je izomorfan anihilatoru od $\mathfrak{a}$ pa je suma dimenzija prostora $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ jednaka dimenziji cijelog prostora. Odatle slijedi $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$, i to kao Liejeve algebre. □

Indukcijom po dimenziji poluproste Liejeve algebre dokazuje se da je poluprosta Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ direktna suma prostih. Zaista, ako $\mathfrak{g}$ nije prosta, tada sadrži netrivijalan ideal $\mathfrak{h}$ i vrijedi $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$, gdje je $\mathfrak{h}^{\perp}$ ortogonalni komplement od $\mathfrak{h}$ s obzirom na formu B, defniran u dokazu Propozicije 2.3.4.. Budući da su dimenzije od $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{h}^{\perp}$ strogo manje od dimenzije od $\mathfrak{g}$, tvrdnja slijedi iz pretpostavke indukcije.

Vrijedi i obrat, to jest: direktna suma prostih Liejevih algebri je poluprosta Liejeva algebra. Naime, neka je $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_i$ dekompozicija od $\mathfrak{g}$ na direktnu sumu prostih ideala, $\mathfrak{h}$ komutativan ideal u $\mathfrak{g}$ i $\pi_i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_i$ projekcije. Vrijedi $\mathfrak{h} = \bigoplus \pi_i(\mathfrak{h})$ te $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}] = [\mathfrak{g}_i, \pi_i(\mathfrak{h})]$. Zbog činjenice da je $\mathfrak{h}$ ideal i da svaki element iz $\mathfrak{h}$ dopušta jedinstven prikaz kao suma elemenata iz $\mathfrak{g}_i$, zaključujemo da je $\pi_k(\mathfrak{h})$ ideal u $\mathfrak{g}_k$ za svaki k. Sada imamo

$$0 = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = [\pi_i(\mathfrak{h}), \pi_i(\mathfrak{h})],$$

odakle slijedi da je $\pi_i(\mathfrak{h})$ komutativan ideal u $\mathfrak{g}_i$ za svako i. Budući da proste Liejeve algebre nisu komutativne, imamo $\pi_i(\mathfrak{h}) = 0$ za svako i, što povlači $\mathfrak{h} = 0$.
Primijetimo da iz prethodne propozicije i činjenice da je $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ ideal za svaku Liejevu algebru slijedi da je svaka poluprosta Liejeva algebra i savršena.

Za reprezentaciju Liejeve algebre kažemo da je potpuno reducibilna ako se može rastaviti na direktnu sumu ireducibilnih reprezentacija. Za Liejevu algebru kažemo da je potpuno reducibilna ako je svaka njezina reprezentacija potpuno reducibilna.

Dokazat ćemo da je za Liejeve algebre svojstvo potpune reducibilnosti ekvivalentno svojstvu poluprostosti.
Dokažimo najprije

Propozicija 2.3.5. *Ako kompleksna Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ ima svojstvo potpune reducibilnosti, tada je $\mathfrak{g}$ poluprosta.*

Dokaz. Budući da je svaka reprezentacija od $\mathfrak{g}$ potpuno reducibilna, to je i $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ potpuno reducibilna. Na taj način dobivamo dekompoziciju od $\mathfrak{g}$ na direktnu sumu ad - invarijantnih potprostora $\mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r$. Očito je potprostor od $\mathfrak{g}$ ad-invarijantan ako i samo ako je ideal u $\mathfrak{g}$. Dakle, svaki $\mathfrak{g}_i$ je ideal. Odatle i iz činjenice da je $\mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_j = 0$ za $i \neq j$ slijedi da je $\mathfrak{g}$ direktna suma Liejevih algebri $\mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r$. Dokažimo da je svaki $\mathfrak{g}_i$ prost ideal. Netrivijalan ideal u $\mathfrak{g}_i$ bio bi i netrivijalan ad-invarijantan potprostor od $\mathfrak{g}_i$, što je u kontradikciji s tim da je $\mathfrak{g}_i$ ad-ireducibilan. Ostaje pokazati da je $\dim \mathfrak{g}_i > 1$ za svaki i.
Iz već dokazana činjenice da je Liejeva algebra bez netrivijalnih ideala komutativna ako i samo ako je dimenzije 1, slijedi da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$, gdje smo sa $\mathfrak{h}$ označili sumu svih prostih ideala $\mathfrak{g}_i$, a sa $\mathfrak{a}$ sumu svih jednodimezionalnih ideala $\mathfrak{g}_i$. Dakle, $\mathfrak{h}$ je poluprosta, a

$\mathfrak{a}$ komutativna Liejeva algebra. Pretpostavimo da je $\mathfrak{a} \neq 0$. Definiramo sada reprezentaciju od $\mathfrak{g}$ na kompleksnom vektorskom prostoru $\mathbb{C}^2$. Neka je $\{X_1, \ldots, X_k\}$ baza od $\mathfrak{a}$ i $\{e_1, e_2\}$ kanonska baza za $\mathbb{C}^2$. Stavimo

$$\pi(X_i)e_1 = i \cdot e_1, \quad \pi(X_i)e_2 = e_1 + i \cdot e_2.$$

Proširimo preslikavanje π po linearnosti do $\mathfrak{a}$ i stavimo $\pi(Y) = 0$ za svaki $Y \in \mathfrak{h}$. Primijetimo da je matrični prikaz proizvoljnog operatora iz $\pi(\mathfrak{g})$ u bazi $\{e_1, e_2\}$ ili nul-matrica ili u Jordanovoj formi s jednim blokom. Dakle, $\pi(\mathfrak{a})$ je komutativna podalgebra od $\mathfrak{gl}(\mathbb{C}^2)$. Kako je $\mathfrak{a}$ komutativna, zaključujemo da je π reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{a}$.
Očito je $\mathbb{C}e_1$ π - invarijantan potprostor pa reprezentacija π nije ireducibilna.
A kad bi se mogla rastaviti na direktnu sumu jednodimenzionalnih ireducibilnih, operatori $\pi(X)\,(X \in \mathfrak{g})$ bili bi simultano dijagonalizabilni, što je u kontradikciji s tim da Jordanova forma operatora $\pi(X)\,(X \in \mathfrak{a})$ nije dijagonalna matrica. Dokazali smo da reprezentacija π nije potpuno reducibilna, što je kontradikcija s pretpostavkom teorema. Prema tome $\mathfrak{a} = 0$ i $\mathfrak{g}$ je poluprosta Liejeva algebra. □

Dokažimo obrat gornje propozicije.

Teorem 2.3.6. *Neka je V reprezentacija kompleksne poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i $W < V$ $\mathfrak{g}$-invarijantan potprostor. Tada postoji $\mathfrak{g}$-invarijantan potprostor W' $< V$ takav da je $V = W \oplus W'$.*

Dokaz. Koristimo sljedeću činjenicu koju navodimo bez dokaza: kompleksna poluprosta Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je izomorfna kompleksifikaciji Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$ jednostavno povezane kompaktne Liejeve grupe G. Neka je W $\mathfrak{g}$-invarijantan potprostor od V. Tada je pogotovo W $\mathfrak{g}_0$-invarijantan, odnosno W je reprezentacija od $\mathfrak{g}_0$. Iz 2.2.1 slijedi da je W reprezentacija kompaktne Liejeve grupe G, a iz Napomene 2.0.3 slijedi da je W i G-invarijantan. Poznata je činjenica da kompaktne grupe imaju svojstvo potpune reducibilnosti, što povlači postojanje G-invarijantnog potprostora W' $< V$ takvog da je $V = W \oplus W'$'. Opet iz Napomene 2.0.3 slijedi da je W' $\mathfrak{g}_0$-invarijantan, a iz Napomene 2.0.4 slijedi da je W' $\mathfrak{g}$-invarijantan. □

Dokazali smo sljedeće karakterizacije poluproste Liejeve algebre:

Teorem 2.3.7. *Za kompleksnu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ sljedeće je ekvivalentno:*

a) $\mathfrak{g}$ je poluprosta;

b) $\mathfrak{g}$ *nema nenul komutativnih ideala;*

c) $\mathfrak{g}$ *je direktna suma prostih ideala;*

d) Kilingova forma od $\mathfrak{g}$ *je nedegenerurana;*

e) $\mathfrak{g}$ *ima svojstvo potpune reducibilnosti.*

Na kraju navodimo jedan rezultat bez dokaza koji ćemo koristiti u narednim poglavljima.

Teorem 2.3.8. *Neka je* $\mathfrak{g}$ *poluprosta Liejeva algebra. Tada za svaki* $X \in \mathfrak{g}$ *postoje* X_s *i* $X_n \in \mathfrak{g}$ *takvi da za svaku reprezentaciju* $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ *vrijedi*

$$\pi(X)_s = \pi(X_s) \quad i \quad \pi(X)_n = \pi(X_n),$$

pri čemu su $\pi(X)_s$ *i* $\pi(X)_n$ *dijagonalizabilni i nilpotentni dio operatora* $\pi(X)$.

Rastav $X = X_s + X_n$ zove se apstraktna Jordanova dekompozicija.

Poglavlje 3

Reprezentacije poluprostih Liejevih algebri

3.1 Reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$

Za početak, odaberimo sljedeću bazu za $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lako se provjeri da vrijedi

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y \quad \text{i} \quad [X, Y] = H.$$

Posebno, operator $\mathrm{ad}(H)$ se dijagonalizira u izabranoj bazi. Liejeva algebra $sl_2\mathbb{C}$ je prosta. Naime, neka je $aH+bX+cY$ neki nenul-element netrivijalnog ideala u $sl_2\mathbb{C}$. Primijetimo da ako je neki od elemenata baze H, X, Y iz ideala, iz gornjih jednakosti slijedi da su i ostali. Pa ako je $b \neq 0$, djelujemo dvaput elementom Y i dobivamo da je Y element ideala. Slično, ako je $c \neq 0$, djelujemo elementom X dvaput i dobivamo da je X element ideala. Adjungirana reprezentacija poluproste Liejeve algebre je vjerna pa iz teorema 2.3.8 slijedi da je djelovanje elementa H u svakoj reprezentaciji dijagonalizabilno. Neka je V ireducibilna reprezentacija od $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$. Imamo dekompoziciju $V = \bigoplus V_\alpha$, gdje su α svojstvene vrijednosti djelovanja elementa H (zasad kompleksni brojevi), a V_α pripadni svojstveni potprostori. Neka je $v \in V_\alpha$. Imamo

$$\begin{aligned} H.(X.v) &= X.(H.v) + [H, X].v \\ &= X.(\alpha(H)v) + 2X.v \\ &= (\alpha + 2) \cdot X.v \end{aligned}$$

odakle zaključujemo da X potprostor V_α preslikava u potprostor $V_{\alpha+2}$.
Sličan račun pokazuje da je $Y.V_\alpha \subset V_{\alpha-2}$. Budući da je reprezentacija V ireducibilna, zaključujemo da su kompleksni brojevi α međusobno kongruentni modulo 2. U protivnom bi potprostor $\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_{\alpha_0+2n}$ bio pravi $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ - invarijantan potprostor od V, što je kontradikcija s ireducibilnošću od V. Također, zbog konačne dimenzionalnosti od V, postoji konačno mnogo potprostora V_α različitih od 0. Označimo ih sa $V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \dots V_{\alpha_m}$. Tada se brojevi $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ mogu poredati u niz oblika

$$\beta, \dots, \beta + 2, \dots, \beta + 2m. \tag{3.1}$$

Zaista, pretpostavimo radi određenosti da je $V_{\alpha_1} \neq 0, V_{\alpha_1+4} \neq 0$ i $V_{\alpha_1+2} = 0$. Tada je očito potprostor $\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} V_{\alpha_1+2n}$ pravi $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ – invarijantan potprostor od V, što je opet kontradikcija s ireducibilnošću od V.

Označimo sa n posljednji element niza (3.1) i odaberimo $0 \neq v \in V_n$.
Imamo tvrdnju

Propozicija 3.1.1. *Vektori* $\{v, Y.v, Y^2.v, \dots\}$ *razapinju* V.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je potprostor W razapet tim vektorima $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ – invarijantan. Očito je Y – invarijantan, ali i H – invarijantan jer je

$$H.(Y^m.v) = (n - 2m)Y^m.v$$

Dokažimo $X.W \subset W$. Imamo $X.v = 0$. Zatim,

$$\begin{aligned} X.(Y.v) &= [X, Y].v + Y.(X.v) \\ &= H.v + Y.0 = nv. \end{aligned}$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} X.(Y^2.v) &= [X, Y].(Y.v) + Y.(X.(Y.v)) \\ &= H.(Y.v) + Y.(nv) \\ &= (n-2)\,Y.v + nY.v \\ &= 2(n-1)\,Y.v. \end{aligned}$$

Indukcijom se dokazuje formula

$$\begin{aligned} X.(Y^m.v) &= (n + (n-2) + (n-4) + \cdots + (n-2m+2))\,Y^m.v \\ &= m(n-m+1)\,Y^m.v, \end{aligned}$$

što dokazuje tvrdnju. □

Iz gornje propozicije i činjenice da potprostori V_α čine direktnu sumu, slijedi da su svi svojstveni potprostori od H jednodimenzionalni. Kako se svojstvene vrijednosti mogu poredati u niz oblika (3.1), to je $Y^k.v = 0$ ako i samo ako je $V_{n-2k} = 0$. Odatle i iz konačne dimenzionalnosti od V zaključujemo da dovoljno velika potencija od Y poništava v. Primijetimo da je najmanja potencija od Y koja poništava v upravo m. Dokazali smo

$$0 = X.(Y^m.v) = m(n - m + 1) \cdot Y^{m-1}.v$$

pa zbog $Y^{m-1}.v \neq 0$, to je $n = m{-}1 \in \mathbb{N}$. Prema tome, posljednji element niza svojstvenih vrijednosti od H pod (3.1) je prirodan broj. Isti niz sadrži m elemenata koji se razlikuju za 2 pa zaključujemo da su sve svojstvene vrijednosti od H cijeli brojevi, i još k tome simetrični oko nule. Odnosno, za danu najveću svojstvenu vrijednost n od H jedinstveno su određene ostale svojstvene vrijednosti, kao i djelovanja elemenata baze $\{X, Y, H\}$ od $sl_2\mathbb{C}$. Dakle, ireducibilna reprezentacija $V^{(n)}$ jedinstveno je određena najvećom svojstvenom vrijednošću od n. Primijetimo još da su u tom slučaju svojstvene vrijednosti jednake $-n, -n + 2, \dots, n$, što znači da je reprezentacija $V^{(n)}$ $(n + 1)$ – dimenzionalna.

Budući da je Liejeva algebra $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ poluprosta, svaka je reprezentacija direktan produkt ireducibilnih. U svakom ireducibilnom faktoru pojavljuju se ili samo parne ili samo neparne svojstvene vrijednosti, i to svaka sa kratnosti 1. Prema tome broj ireducibilnih faktora u svakoj reprezentaciji jednak je zbroju kratnosti svojstvenih vrijednosti 0 i 1.

Spomenimo neke ireducibilne reprezentacije od $sl_2\mathbb{C}$. Za početak, jednodimenzionalna reprezentacija je ireducibilna pa kako je jedini jednočlan skup koji je simetričan oko 0 jednak $\{0\}$, zaključujemo da se radi o $V^{(0)}$.
Zatim, imamo standardnu reprezentaciju na $V = \mathbb{C}^2$. Ako su x i y vektori kanonske baze na V, tada je $H(x) = x$ i $H(y) = -y$. Tako je

$$V = Cx \oplus Cy = V_{-1} \oplus V_1$$

upravo reprezentacija $V^{(1)}$. Slično tome, baza za simetrični kvadrat $W = \mathrm{Sym}^2 V$ je $\{x^2, xy, y^2\}$ i vrijedi (vidi poglavlje Liejeve algebre)

$$\begin{aligned} H(x \cdot x) &= x \cdot H(x) + H(x) \cdot x \\ &= 2x \cdot x, \end{aligned}$$

$$H(x \cdot y) = x \cdot H(y) + H(x) \cdot y = 0$$

i

$$\begin{aligned} H(y \cdot y) &= y \cdot H(y) + H(x) \cdot y \\ &= -2y \cdot y. \end{aligned}$$

Zaključujemo

$$\begin{aligned} W &= \mathbb{C} \cdot x^2 \oplus \ C \cdot xy \oplus \mathbb{C} \cdot y^2 \\ &= W_2 \oplus W_0 \oplus W_{-2}, \end{aligned}$$

što je upravo $V^{(2)}$. Općenito, baza n-te tenzorske potencije od V je $\{x^n, x^{n-1}y, \ldots, y^n\}$, a induktivno se dokazuje formula

$$H(x^{n-k}y^k) = (n-2k)x^{n-k}y^k.$$

Odatle vidimo da su svojstvene vrijednosti od H jednake $-n, -n+2, \ldots, n$. Budući da su jednostruke i iste parnosti, to je $\mathrm{Sym}^n V \cong V^{(n)}$. Prema tome, svaka ireducibilna reprezentacija od $sl_2\mathbb{C}$ je simetrična potencija standardne reprezentacije.

3.2 Struktura i reprezentacije poluprostih Liejevih algebri

Definicija 3.2.1. *Ako je $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra, Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ je kompleksan potprostor $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{g}$ sa sljedećim svojstvima:*

1. *Za sve H_1 i H_2 iz $\mathfrak{h}$, $[H_1, H_2] = 0$.*
2. *Za sve $H \in \mathfrak{h}$ operator $ad(H)$ na $\mathfrak{g}$ je dijagonalizabilan.*
3. *Ako je $X \in \mathfrak{g}$ takav da je $[H, X] = 0$ za sve $H \in \mathfrak{h}$, tada je $X \in \mathfrak{h}$.*

Drugim riječima, Cartanova podalgebra je maksimalna komutativna podalgebra sa svojstvom da je djelovanje svakog elementa podalgebre dijagonalizabilno.
Ostaje pitanje egzistencije Cartanove podlagebre. Pokazujemo da svaka kompleksna poluprosta Liejeva algebra posjeduje Cartanovu podalgebru.

Prisjetimo se svojstva kompleksnih poluprostih Liejevih algebri koje smo naveli u dokazu

Teorema 2.3.6 to jest da je kompleksna Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ izomorfna kompleksifikaciji Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$ jednostavno povezane kompaktne Liejeve grupe G. Označimo sa $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ sliku po tom izomorfizmu od $\mathfrak{g}_0$. Vrijedi $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + i\mathfrak{k}$. Podalgebru $\mathfrak{k}$ zovemo kompaktnom realnom formom od $\mathfrak{g}$.
Primijetimo da svaka algebra $\mathfrak{k}$ sadrži maksimalnu komutativnu podalgebru. Naime, samo uzmemo komutativnu podalgebru maksimalne dimenzije.
Sada imamo

Teorem 3.2.2. *Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra i $\mathfrak{k}$ njezina kompaktna realna forma. Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ dana je sa $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} + i\mathfrak{t}$, gdje je $\mathfrak{t}$ neka maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{k}$.*

Dokaz. Očito je $\mathfrak{h}$ komutativna podalgebra od $\mathfrak{g}$. Dokažimo da je maksimalna takva. Pretpostavimo da $X \in \mathfrak{g}$ komutira sa $\mathfrak{h}$. Posebno, komutira sa svakim $H \in \mathfrak{t}$. Zapišimo X u obliku

$$X = X_1 + iX_2, \quad X_1, X_2 \in \mathfrak{k}.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} 0 &= [H, X] \\ &= [H, X_1] + i[H, X_2], \end{aligned}$$

pri čemu su $[H, X_1]$ i $[H, X_2] \in \mathfrak{k}$. Rastav svakog elementa iz $\mathfrak{g}$ na sumu elemenata iz $\mathfrak{k}$ je jedinstven, a to znači da je

$$[H, X_1] = [H, X_2] = 0.$$

Odatle slijedi $X_1, X_2 \in \mathfrak{t}$, što dokazuje $X \in \mathfrak{h}$.
Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$. Ako nije, tvrdnju teorema dokazujemo za Liejevu algebru $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ (sjetimo se da je adjungirana reprezentacija poluproste Liejeve algebre vjerna). I u tom slučaju Cartanovu podalgebru od $\mathfrak{g}$ dobivamo kao prasliku po ad Cartanove podalgebre od $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$. Netrivijalna je činjenica (koju nećemo dokazivati) da je podgrupa K od $GL_n\mathbb{C}$ generirana sa $\exp(\mathfrak{k})$, gdje je $\mathfrak{k}$ kompaktna realna forma Liejeve algebre $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$, kompaktna Liejeva podgrupa od $GL_n\mathbb{C}$. Tada je, naravno, $\mathfrak{k}$ Liejeva algebra Liejeve grupe K. Metodom usrednjenja konstruira se realni skalarni produkt $\langle\, , \rangle$ na $\mathfrak{k}$ koji je invarijantan na adjungirano djelovanje od K, to jest $\mathrm{Ad}(A)$ je ortogonalan operator na $\mathfrak{k}$ za svaki $A \in K$. Prema tome grupu $\mathrm{Ad}(K)$ možemo shvatiti kao podgrupu od $O_n\mathbb{R}$, a to znači da je njezina Liejeva algebra $\mathrm{ad}(\mathfrak{k})$ podalgebra od $O_n\mathbb{R}$. Dakle, $\mathrm{ad}(X) : \mathfrak{k} \to \mathfrak{k}$ je antisimetričan operator za svaki $X \in \mathfrak{k}$. To znači da je prošireni $\mathrm{ad}(X) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ antihermitski operator na kompleksnom konačnodimenzionalnom prostoru $\mathfrak{g}$ za svaki $X \in \mathfrak{k}$, pa i

dijagonalizabilan na $\mathfrak{g}$. Posebno to vrijedi za $\mathrm{ad}(H)$ za svaki $H \in \mathfrak{t}$.
Naposlijetku, neka je $H \in \mathfrak{h}$ proizvoljan element oblika $H = H_1 + iH_2$, gdje su H_1 i $H_2 \in \mathfrak{t}$. Budući da H_1 i H_2 komutiraju, komutiraju i operatori $\mathrm{ad}(H_1)$ i $\mathrm{ad}(H_2)$. Linearna kombinacija komutativnih dijagonalizabilnih operatora je dijagonalizabilna, što pokazuje da su operatori $\mathrm{ad}(H) \in \mathfrak{h}$ dijagonalizabilni. □

Neka je $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Zbog komutativnosti od $\mathfrak{h}$ familija operatora $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$ je komutativna pa onda i simultano dijagonalizabilna. Imamo dekompoziciju od $\mathfrak{g}$ na direktnu sumu svojstvenih potprostora:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus (\bigoplus \mathfrak{g}_\alpha),$$

pri čemu direktna suma ide po konačnom skupu $R \subset \mathfrak{h}^*$. Svaki $\alpha \in R$ nazivamo korijenom Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i vrijedi:

$$\mathrm{ad}(H)(X) = \alpha(H)X, \quad \text{za svaki } H \in \mathfrak{h} \quad \text{i} \quad \text{za svaki } X \in \mathfrak{g}.$$

Očito je $\mathfrak{h}$ sadržana u svojstvenom potprostoru za svojstvenu vrijednost 0. A svojstvo 3. iz definicije Cartanove podalgebre odmah daje i obratnu inkluziju. Dakle, imamo $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$.

Neka su $H \in \mathfrak{h}$, $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $Y \in \mathfrak{g}_\beta$ proizvoljni.
Imamo

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}(H) \circ \mathrm{ad}(X)(Y) &= \mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(H)(Y) + \mathrm{ad}([H, X])(Y)\\ &= \mathrm{ad}(X) \circ (\beta(H)Y) + \alpha(H)\mathrm{ad}(X)(Y)\\ &= (\alpha + \beta)(H)\mathrm{ad}(X)(Y).\end{aligned}$$

Zaključujemo da je

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$$

Odatle slijedi da je za α i $\beta \in R$, takve da je $\alpha + \beta \neq 0$, i za $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $Y \in \mathfrak{g}_\beta$ operator $\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y)$ nilpotentan:

$$(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y))^n(\mathfrak{g}_\gamma) \subset \mathfrak{g}_{\gamma+n(\alpha+\beta)}\,, \tag{3.2}$$

a vrijedi $\mathfrak{g}_\alpha = 0$ za sve osim konačno mnogo $\alpha \in \mathfrak{h}^*$. Posebno, $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y)) = 0$, što povlači $B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$ za $\alpha + \beta \neq 0$.

Propozicija 3.2.3. *Ako je $\alpha \in \mathbb{R}$, onda je $-\alpha \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. Kada za $\alpha \in R$ -α ne bi bio korijen, iz (3.2) nenul-potprostor $\mathfrak{g}_\alpha$ bio bi okomit na sve $\mathfrak{g}_\beta$, $\beta \in R \cup \{0\}$, no to je u kontradikciji s nedegeneriranosti Killingove forme na poluprostoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$.
Prema tome, ako je α korijen, onda je i $-\alpha$ korijen. □

Primijetimo da je restrikcija

$$B_{\,|\,\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}} : \mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha} \to \mathbb{C}$$

nedegenerirana. U protivnom bi postojao $0 \neq X \in \mathfrak{g}_\alpha$ koji je okomit na $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ pa onda i na cijeli prostor $\mathfrak{g}$, što je nemoguće. Neka su $H \in \mathfrak{h}$ i $X \in \mathfrak{g}$ proizvoljni te neka je H' jedinstveni element iz $\mathfrak{h}$ koji se javlja u rastavu od X na sumu vektora iz svojstvenih potprostora. Imamo

$$B(H, X) = B(H, H'),$$

što povlači da je restrikcija od B na $\mathfrak{h}$ također nedegenerirana.

Propozicija 3.2.4. *Korijeni razapinju $\mathfrak{h}^*$.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji nenul-vektor $H \in \mathfrak{h}$ takav da je $\alpha(H) = 0$ za svaki $\alpha \in R$. To znači da je $[H, X] = 0$ za sve X u svim $\mathfrak{g}_\alpha$ (uključujući $\alpha = 0$), što znači da je H iz centra od $\mathfrak{g}$, ali centar poluproste Liejeve algebre je trivijalan. □

Neka je α korijen, $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ i $H \in \mathfrak{h}$.
Imamo

$$\begin{aligned} B(H, [X, Y]) &= B([H, X], Y) \\ &= \alpha(H)B(X, Y), \end{aligned} \tag{3.3}$$

pri čemu je prva jednakost dokazana u (2.9).

Iz nedegeneriranosti od B na $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$ i činjenice da korijeni razapinju $\mathfrak{h}^*$, zaključujemo da gornji izraz ne može biti jednak 0 za svaki izbor H, X i Y.
Dakle,

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \neq 0, \quad \text{za svaki } \alpha \in R.$$

Posljedica Rieszovog teorema je da Killingova forma uspostavlja izomorfizam prostora $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{h}^*$. Preciznije, vektoru β iz $\mathfrak{h}^*$ odgovara vektor T_β iz $\mathfrak{h}$ takav da vrijedi

$$B(T_\beta, H) = \beta(H) \quad \text{za sve } H \in \mathfrak{h}.$$

Neka je α korijen i T_α element iz $\mathfrak{h}$ dualan korijenu alfa. Iz (3.3) i nedegeneriranosti od B na $\mathfrak{h}$ slijedi

$$[X, Y] = B(X, Y)\mathrm{T}_\alpha, \quad \text{za sve } X \in \mathfrak{g}_\alpha \text{ i } Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}. \tag{3.4}$$

Sada dokazujemo $\alpha(\mathrm{T}_\alpha) \neq 0$.
Pretpostavimo suprotno. Prema dokazanom možemo odabrati $X \in \mathfrak{g}_\alpha, Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ takve da je $B(X, Y) = c \neq 0$. Iz (3.4) slijedi da vektori X, Y i T_α razapinju podalgebru $\mathfrak{s}$ od $\mathfrak{g}$. Ako je $\alpha(\mathrm{T}_\alpha) = 0$, tada je $\mathcal{D}\mathfrak{s} = \mathrm{span}\{\mathrm{T}_\alpha\} = Z(\mathfrak{s})$, a odatle je $\mathcal{D}^2\mathfrak{s} = 0$, što znači da je $\mathfrak{s}$ rješiva. Iz Liejevog teorema slijedi da u nekoj bazi matrica operatora $\mathrm{ad}(T_\alpha) : \mathfrak{g}- > \mathfrak{g}$ poprima strogo gornjetrokutasti oblik, što znači da je $\mathrm{ad}(T_\alpha)$ nilpotentan operator. Kako je $\mathrm{ad}(H)$ dijagonalizabilan za sve $H \in \mathfrak{h}$ i ad je injekcija na $\mathfrak{g}$, to je $\mathrm{T}_\alpha = 0$, što je kontradikcija. Dokazali smo $[[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}], \mathfrak{g}_{-\alpha}] \neq 0$, za svaki korijen α.

Dakle, možemo naći $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ takve da je $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$ i $\alpha(H_\alpha) \neq 0$. Množeći H_α odgovarajućim skalarom, možemo postići da vrijedi $\alpha(H_\alpha) = 2$, odnosno $[H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha$, i $[H_\alpha, Y_\alpha] = -2Y_\alpha$. Ovo pokazuje da je potprostor $\mathfrak{s}_\alpha$ razapet vektorima $X_\alpha, Y_\alpha, H_\alpha$ podalgebra od $\mathfrak{g}$ izomorfna sa $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, pri čemu vektori $H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha$ odgovaraju redom vektorima standardne baze $\{H, X, Y\}$ za $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Propozicija 3.2.5. *Jedini višekratnici od α u skupu korijena su upravo α i $-\alpha$.*

Dokaz. Neka je V_α potprostor od $\mathfrak{g}$ razapet vektorom H_α i prostorima $\mathfrak{g}_\beta$, gdje je β korijen proporcionalan sa α, odnosno oblika $k\alpha$ za $k \in \mathbb{C}$. Očito je V_α invarijantan na djelovanje operatora $\mathrm{ad}(H_\alpha)$. Iz već dokazane relacije $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ zaključujemo da je V_α invarijantan i na djelovanje vektora X_α i Y_α. Dakle, V_α je reprezentacija od $\mathfrak{s}_\alpha \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Znamo da su svojstvene vrijednosti operatora $\mathrm{ad}(H_\alpha)$ cijeli brojevi, a prostori $\mathfrak{g}_\beta$ su svojstveni potprostori od $\mathrm{ad}(H_\alpha)$ sa svojstvenim vrijednostima $\beta(H_\alpha) = \mathrm{k}\alpha(H_\alpha) = 2\mathrm{k} \in Z$. Prema tome, ako je $\mathrm{k}\alpha$ korijen, onda je k cjelobrojni višekratnik od $\frac{1}{2}$.

Liejeva algebra $\mathfrak{s}_\alpha$ je poluprosta pa i potpuno reducibilna, zato se reprezentacija V_α razlaže na direktnu sumu ireducibilnih. Od toga je jedan ireducibilni faktor $\mathfrak{s}_\alpha$, a ostale označimo sa $U_1, \ldots, U_k$.

Pretpostavimo da je 2α korijen od $\mathfrak{g}$. Tada je $2\alpha(H_\alpha) = 4$ svojstvena vrijednost od $\mathrm{ad}(H_\alpha)$. Budući da su potprostori $\mathfrak{s}_\alpha$, $U_1, \dots, U_k$ $\mathrm{ad}(H_\alpha)$ -invarijatni i čine direktnu sumu, 4 je svojstvena vrijednost u barem jednom od potprostora $U_1, \dots, U_k$ (znamo da nije u $\mathfrak{s}_\alpha$).
Pretpostavimo radi određenosti u U_1. Ali svojstvene vrijednosti ireducibilne reprezentacije od $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ iste su parnosti i poredane rastuće čine neprekinut niz od nekog cijelog broja $-m$ do m. To znači da je i 0 svojstvena vrijednost u U_1 sa svojstvenim vektorom Z. Po definiciji je V_α direktna suma prostora $\mathrm{span}\{H_\alpha\}$ i $\mathfrak{g}_\beta$, gdje su β korijeni proporcionalni s α. Prostori $\mathfrak{g}_\beta$ su svojstveni za $\mathrm{ad}(H_\alpha)$ sa svojstvenim vrijednostima $\beta(H_\alpha) \neq 0$. Imamo $Z = T_\alpha + \sum T_\beta$, gdje su $T_\alpha \in \mathrm{span}\{H_\alpha\}$, $T_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$ s β kao gore. Nakon djelovanja operatorom $\mathrm{ad}(H_\alpha)$ zaključujemo $T_\beta = 0$ za sve β. Odatle je $Z \in \mathrm{span}\{H_\alpha\} \subset \mathfrak{s}_\alpha$, što znači $\mathfrak{s}_\alpha \cap U_1 \neq 0$. A to je kontradikcija.
Sada lako dobivamo tvrdnju propozicije.
Naime, pretpostavimo da je $\beta = k\alpha$ korijen, za neki $k \in S := \{\pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \cdots\}$. Onda je i $\alpha = \frac{1}{k}\beta$ pa je prema dokazanom $\frac{1}{k}$ cjelobrojni višekratnik od $\frac{1}{2}$. Jedini k iz S s takvim svojstvom su $\pm\frac{1}{2}$ i ± 1. Za $k = \frac{1}{2}, \alpha = 2\beta$, a za $k = -\frac{1}{2}, \alpha = -2\beta$. U oba slučaja je dva puta korijen opet korijen, što je kontradikcija. □

Štoviše, prostori $\mathfrak{g}_\alpha$ su jednodimenzionalni.
Pretpostavimo suprotno. Neka je X' vektor iz $\mathfrak{g}_\alpha$ nezavisan sa X_α.
Neka je V_α kao u dokazu Propozicije 3.2.5 i neka su $\mathfrak{s}_\alpha, U_1, \dots, U_k$ ireducibilni faktori od V_α. Dokazali smo $V_\alpha = \mathrm{span}\{H_\alpha\} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Imamo prikaz $X' = T_\alpha + T_1 + \ldots + T_k$, gdje su $T_\alpha \in \mathfrak{s}_\alpha$, $T_i \in U_i$. Djelujući operatorom $\mathrm{ad}(H_\alpha)$, dobivamo $2X' = 2T_\alpha + \mathrm{ad}(H_\alpha)(T_1) + \ldots + \mathrm{ad}(H_\alpha)(T_k)$. Znamo da je $\mathfrak{s}_\alpha \subset V_\alpha$ ireducibilna reprezentacija od $\mathfrak{s}_\alpha \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ pa su svojstveni potprostori od $\mathrm{ad}(H_\alpha) : \mathfrak{s}_\alpha \to \mathfrak{s}_\alpha$ jednodimenzionalni. Odatle slijedi da je $\mathrm{ad}(H_\alpha)(T_{i_0}) \neq 0$ za neko i_0 pa je svojstveni potprostor od $\mathrm{ad}(H_\alpha)$ u U_{i_0} za svojstvenu vrijednost 2 netrivijalan. Zato je i jezgra od $\mathrm{ad}(H_\alpha)$ u U_{i_0} netrivijalna (zbog simetričnosti oko 0 i neprekinutosti niza svojstvenih vrijednosti od $\mathrm{ad}(H)$ u ireducibilnoj reprezentaciji U_{i_0} od $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$). Ali tada je $\mathfrak{s}_\alpha \cap U_{i_0} \neq 0$, što je kontradikcija.

Budući da je djelovanje od $\mathfrak{h}$ dijagonalizabilno u jednoj vjernoj reprezentaciji od $\mathfrak{g}$ (adjungirana reprezentacija), prema Teoremu 2.3.8 dijagonalizabilno je i u bilo kojoj. Neka je onda V ireducibilna reprezentacija od $\mathfrak{g}$. Imamo rastav od V na direktnu sumu potprostora $V = \bigoplus V_\alpha$, pri čemu direktna suma ide po konačnom podskupu od $\mathfrak{h}^*$ i na svakom V_α podalgebra $\mathfrak{h}$ djeluje dijagonalno, to jest vrijedi

$$H.v = \alpha(H)v, \quad \text{za sve } H \in \mathfrak{h} \text{ i } v \in V_\alpha.$$

Linearne funkcionale α koji se pojavljuju u direktnoj sumi zovemo težinama od V, a potprostore V_α težinskim potprostorima. Dimenziju prostora V_α zovemo multiplicitetom težine α.

Analogno kao i kod adjungirane reprezentacije od $\mathfrak{g}$ dokaže se da za svaki korijenski potprostor $\mathfrak{g}_\beta$ imamo $\mathfrak{g}_\beta : V_\alpha \to V_{\alpha+\beta}$.
Također, sve su težine ireducibilne reprezentacije međusobno kongruentne modulo Λ_R, gdje je Λ_R rešetka generirana skupom korijena.
To slijedi iz toga što je potprostor

$$\bigoplus_{\beta\in\Lambda_R} V_{\alpha+\beta} < V$$

invarijantan na djelovanje od $\mathfrak{g}$.

Kao i ranije označimo za korijen $\alpha \in R$ sa $\mathfrak{s}_\alpha$ podalgebru od $\mathfrak{g}$ izomorfnu Liejevoj algebri $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$. Iz poglavlja o reprezentacijama $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ znamo da su svojstvene vrijednosti od H_α u bilo kojoj reprezentaciji cijeli brojevi, što znači da težine bilo koje reprezentacije od $\mathfrak{g}$ poprimaju cjelobrojne vrijednosti na svim vektorima H_α. Skup svih linearnih funkcionala na $\mathfrak{h}$ s tim svojstvom označujemo sa Λ_W. Kako su korijeni težine adjungirane reprezentacije, imamo $\Lambda_R \subset \Lambda_W$. Pokazat ćemo kasnije da je kvocijent Λ_W/Λ_R uvijek konačan.

Neka je sada Ω_α prostor svih linearnih funkcionala na $\mathfrak{h}$ koji se poništavaju na H_α. Definiramo operator $W_\alpha : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*$ kao refleksiju preko hiperravnine Ω_α takvu da je $W_\alpha(\alpha) = -\alpha$. Imamo formulu

$$\begin{aligned} W_\alpha(\beta) &= \beta - \frac{2\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)}\alpha \\ &= \beta - \beta(H_\alpha)\alpha. \end{aligned}$$

Očito je W_α invertibilan jer je involucija. Grupu W generiranu sa svim W_α ($\alpha \in R$) zovemo Weylovom grupom. Neka je V proizvoljna reprezentacija od $\mathfrak{g}$. Budući da je djelovanje od $\mathfrak{h}$ dijagonalizabilno na svakom ireducibilnom faktoru od V, a V je potpuno reducibilna reprezentacija od $\mathfrak{g}$, imamo dekompoziciju od V na direktnu sumu svojstvenih potprostora od $\mathfrak{h}$:

$$V = \bigoplus V_\beta,$$

pri čemu direktna suma ide po konačnom skupu težina reprezentacije V.
Vrijedi

Teorem 3.2.6. *Skup težina i njihovi multipliciteti invarijantni su na djelovanje Weylove grupe.*

Dokaz. Fiksirajmo $\alpha \in R$ i podijelimo skup težina na klase ekvivalencije mod α. Primijetimo da je tada potprostor od V

$$V_{[\beta]} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_{\beta+n\alpha} \tag{3.5}$$

invarijantan na djelovanje podalgebre $\mathfrak{s}_\alpha$, čime $V_{[\beta]}$ postaje reprezentacija od $\mathfrak{s}_\alpha$. Nakon eventualne zamjene β sa $\beta + n\alpha$ za neko n, težine koje odgovaraju nenul-prostorima u (3.5) možemo poredati u niz

$$\beta, \beta + \alpha, \ldots, \beta + m\alpha \quad \text{za neko } m \in \mathbb{Z}.$$

Naime, reprezentacija $V_{[\beta]}$ od $\mathfrak{s}_\alpha$ je direktna suma ireducibilnih, pa je niz svojstvenih vrijednosti od H_α u $V_{[\beta]}$ "suma" nizova iz svakog ireducibilnog faktora. Takve su svojstvene vrijednosti također simetrične oko 0, iste su parnosti jer je svaka težina koja se pojavljuje u $V_{[\beta]}$, pa time i u svakom ireducibilnom faktoru od $V_{[\beta]}$, translat od β za cjelobrojni višekratnik od α te čine neprekinut niz takvih brojeva. Prema tome, iz simetričnosti oko 0 gornjeg niza svojstvenih vrijednosti slijedi

$$\begin{aligned}(\beta + m\alpha)(H_\alpha) &= \beta(H_\alpha) + 2m \\ &= -\beta(H_\alpha),\end{aligned}$$

odakle dobivamo $m = -\beta(H_\alpha)$. Sada je

$$\begin{aligned}W_\alpha(\beta + k\alpha) &= \beta - \beta(H_\alpha)\alpha + (-k)\alpha \\ &= \beta + (m-k)\alpha \in [\beta].\end{aligned}$$

Iz dobivenog slijedi da se za svaku težinu β i za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcional $W_\alpha(\beta)$ nalazi u klasi ekvivalencije od β mod α i u odgovarajućem intervalu, dakle u skupu težina od V. Budući da involucije W_α generiraju Weylovu grupu, prva tvrdnja teorema je dokazana.

Primijetimo da svojstvene vrijednosti od H_α, to jest težine u $V_{[\beta]}$ više ne moraju biti istog multipliciteta. Naime, multipliciteti se smanjuju kako apsolutne vrijednosti svojstvenih vrijednosti od H_α rastu. No zato su suprotne svojstvene vrijednosti istog multipliciteta. Iz dokazanog slijedi da su brojevi $(\beta + k\alpha)(H_\alpha)$ i $W_\alpha(\beta + k\alpha)(H_\alpha)$ suprotni, što znači da težine $\beta + k\alpha$ i $W_\alpha(\beta + k\alpha)$ imaju isti multiplicitet. Time je i druga tvrdnja teorema dokazana. □

Za α i β iz $\mathfrak{h}^*$ neka su T_α i T_β njihovi duali iz $\mathfrak{h}$ s obzirom na Killingovu formu B. Definiramo B na $\mathfrak{h}^*$ formulom

$$B(\alpha, \beta) = B(T_\alpha, T_\beta).$$

Sada dokazujemo da je Weylova grupa ortogonalna s obzirom na Killingovu formu na $\mathfrak{h}^*$. Dovoljno je pokazati da je za svaki korijen α involucija W_α ortogonalan operator, a za to je pak dovoljno pokazati da je $\alpha \perp \Omega_\alpha$. Neka su $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\beta \in \Omega_\alpha$ proizvoljni. Iz (3.4) slijedi da je T_α proporcionalno s H_α. Zato imamo

$$B(\alpha,\beta) = B(T_\alpha, T_\beta) = 0 \quad \text{ako i samo ako}$$
$$B(H_\alpha, T_\beta) = 0 \quad \text{ako i samo ako } \beta(H_\alpha) = 0$$

što vrijedi zbog $\beta \in \Omega_\alpha$.

Pokazali smo da je skup težina proizvoljne reprezentacije od $\mathfrak{g}$ invarijantan na djelovanje Weylove grupe. Posebno to vrijedi za skup korijena kao skup težina adjungirane reprezentacije. Budući da korijeni razapinju $\mathfrak{h}^*$, svaki je element Weylove grupe jedinstveno određen svojim djelovanjem na skupu korijena, koji je konačan. Prema tome, Weylovu grupu možemo shvatiti kao podgrupu grupe permutacija skupa korijena pa je Weylova grupa konačna.
Neka je V konačno-dimenzionalna ireducibilna reprezentacija grupe G i Q bilinearna forma na V invarijantna na djelovanje grupe. Dokazujemo da je Q jedinstvena do na množenje skalarom. Naime, lako se vidi da je anihilator G-invarijantnog potprostora invarijantan na dualno djelovanje od G. To znači da ireducibilnost dualne reprezentacije povlači ireducibilnost polazne. Pa kako je svaka konačno-dimenzionalna reprezentacija ekvivalentna svojoj bidualnoj, zaključujemo da je V^* ireducibilna. Invarijantnost forme Q na djelovanje grupe G znači upravo da je $Q : V \to V^*$ operator preplitanja ireducibilnih reprezentacija V i V^*, a takav je prema Schurovoj lemi jedinstven do na množenje skalarom.
Imamo tvrdnju

Propozicija 3.2.7. *Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna prosta Liejeva algebra. Prostor $\mathfrak{h}^*$ je ireducibilna reprezentacija Weylove grupe W.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathfrak{z} < \mathfrak{h}^*$ invarijantan na djelovanje Weylove grupe. Budući da je Weylova grupa ortogonalna s obzirom na Killingovu formu, ortogonalni komplement od $\mathfrak{z}$ također je $\mathfrak{W}$ – invarijantan. Neka je α korijen. Imamo jedinstven prikaz od α kao $\alpha = \beta + \beta'$ gdje su $\beta \in \mathfrak{z}$ i $\beta' \in \mathfrak{z}^\perp$. Djelujući involucijom W_α, zaključujemo da je $W_\alpha(\beta) = -\beta$ i $W_\alpha(\beta') = -\beta'$. Operator W_α djeluje kao $-I$ samo na pravcu razapetom sa α, odakle slijedi da je jedan od β i β' jednak α, a drugi jednak 0. Odnosno, svaki je korijen ili iz $\mathfrak{z}$ ili iz ortogonalnog komplementa od $\mathfrak{z}$. Prema tome za sve korijene $\alpha \in \mathfrak{z}$ i $\beta \notin \mathfrak{z}$ vrijedi $\beta(H_\alpha) = 0$. Promatramo potprostor $\mathfrak{g}'$ od $\mathfrak{g}$ generiran podalgebrama $\mathfrak{s}_\alpha$, za sve α iz $\mathfrak{z}$. Da je $\mathfrak{g}'$ podalgebra, slijedi iz toga što je za α i β iz $\mathfrak{z}$ suma $\alpha + \beta$ opet iz $\mathfrak{z}$. Štoviše, $\mathfrak{g}'$ je ideal.

Naime, svaka je podalgebra $\mathfrak{s}_\alpha$ očito invarijantna na djelovanje svakog $\mathrm{ad}(H)$ za $H \in \mathfrak{h}$ pa to vrijedi i za $\mathfrak{g}'$. Neka je sada $Y \in \mathfrak{g}_\beta$ za korijen β koji se ne nalazi u $\mathfrak{z}$. Primijetimo da $\alpha + \beta$ nije iz $\mathfrak{z}$ niti je okomit na $\mathfrak{z}$, što znači da nije ni korijen. Odatle slijedi

$$\mathrm{ad}(Y)(\mathfrak{g}_\alpha) = \{0\}.$$

Nadalje,

$$\mathrm{ad}(Y)(H_\alpha) = -\beta(H_\alpha)Y = 0,$$

što povlači da Y komutira sa $\mathfrak{g}'$. Dakle, $\mathfrak{g}'$ je ideal. Ali $\mathfrak{g}$ je prosta Liejeva algebra pa je $\mathfrak{g}'$ jednak $\{0\}$ ili $\mathfrak{g}$. U prvom slučaju potprostor $\mathfrak{z}$ ne sadrži nijedan korijen i svaki je korijen okomit na cijeli $\mathfrak{z}$. Budući da korijeni razapinju $\mathfrak{h}^*$, slijedi $\mathfrak{z} = 0$. U drugom slučaju $\mathfrak{z}$ sadrži sve korijene pa je jednak $\mathfrak{h}^*$. □

Kao što smo vidjeli, Weylova grupa je ortogonalna s obzirom na Killingovu formu na $\mathfrak{h}^*$. U slučaju da je $\mathfrak{g}$ prosta Liejeva algebra, prethodna propozicija povlači da je Killingova forma do na množenje skalarom i jedinstvena forma na $\mathfrak{h}^*$ s takvim svojstvom.

Neka je l linearan funkcional na $\mathfrak{h}^*$ koji poprima realne vrijednosti na Λ_R. Štoviše, pretpostavimo da l ima trivijalnu jezgru na Λ_R. Primijetimo da takav l uvijek možemo pronaći jer je $\mathbb{R}$ beskonačno-dimenzonalan vektorski prostor nad $\mathbb{Q}$. Budući da je jedini višekratnik svakog korijena minus on sam, skup korijena dijeli se na dva disjunktna jednakobrojna skupa R^+ i R^-, pri čemu je $R^+ = \{\alpha \in R : l(\alpha) > 0\}$, a $R^- = -R^+$ Vrijedi, dakle, $R = R^+ \cup R^-$.

Definicija 3.2.8. *Neka je V reprezentacija od $\mathfrak{g}$. Nenul-vektor $v \in V$ koji je svojstven za djelovanje od $\mathfrak{h}$ i nalazi se u jezgri od $\mathfrak{g}_\alpha$ za sve $\alpha \in R^+$ zovemo vektor najveće težine od V.*

Imamo sljedeću tvrdnju:

Propozicija 3.2.9. *Za svaku poluprostu kompleksnu Liejevu algebru vrijedi*

(i) svaka konačno-dimenzionalna reprezentacija V od $\mathfrak{g}$ sadrži vektor najveće težine;
(ii) promatramo uzastopna djelovanja korijenskih prostora $\mathfrak{g}_\beta \in R^-$ na vektor najveće težine v; potprostor W od V generiran sa slikama tih djelovanja je ireducibilna podreprezentacija od $\mathfrak{g}$;
(iii) vektor najveće težine ireducibilne reprezentacije jedinstven je do na množenje skalarom.

Dokaz. (i) Budući da je skup težina konačan, možemo odabrati težinu α za koju je vrijednost $l(\alpha)$ maksimalna. Proizvoljan vektor $v \in V_\alpha$ je očito svojstven za djelovanje od $\mathfrak{h}$, a imamo i

$$\mathfrak{g}_\beta(v) \in V_{\alpha+\beta} = \{0\} \text{ za svaki } \beta \in R^+,$$

pri čemu posljednja jednakost vrijedi jer α maksimizira l u skupu težina.
Prema tome, vektor v je vektor najveće težine od V.
(ii) Primijetimo da je W invarijantan na djelovanje od $\mathfrak{h}$ jer je direktna suma (nekih) korijenskih potprostora od $\mathfrak{g}$. Također je iz definicije od W očito da je invarijantan na djelovanje negativnih korijenskih potprostora.
Označimo sada sa W_n potprostor od V razapet sa svim $w_n.v$, gdje je w_n kompozicija od n operatora iz skupa

$$\bigcup_{\beta \in R^-} \mathfrak{g}_\beta.$$

Neka je X bilo koji element proizvoljnog pozitivnog korijenskog potprostora. Induktivno dokazujemo $X.W_n \subset W_n$. Uzmimo neki od generatora za w_n i zapišimo ga u obliku $Y.w$, gdje je $w \in W_{n-1}$, a Y iz unije negativnih korijenskih potprostora $\mathfrak{g}_\beta$. Imamo $X.(Y.w) = Y.(X.w) + [X, Y].w$.
Iz induktivne pretpostavke slijedi $X.w \in W_{n-1}$ pa onda i $Y.(X.w) \subset W_n$. Budući da je X iz pozitivnog, a Y iz negativnog korijenskog potprostora, $[X, Y]$ je iz $\mathfrak{h}$ ili iz nekog korijenskog potprostora. Ako je iz pozitivnog tada iz pretpostavke indukcije, a ako je iz negativnog, tada iz definicije od W_n slijedi $[X, Y].w \in W_n$. Kako je W unija svih W_n-ova, dokazali smo da je W podreprezentacija od $\mathfrak{g}$.
Iz konstrukcije prostora W vidimo da je težinski potprostor u W koji odgovara težini vektora v jednodimenzionalan. Pa kad W ne bi bio ireducibilna reprezentacija, zbog poluprostosti od $\mathfrak{g}$ mogli bismo ga rastaviti na direktnu sumu netrivijalnih invarijantnih potprostora od kojih bi jedan morao sadržavati span$\{v\}$. Tada bi taj bio jednak cijelom W, što je kontradikcija.
(iii) Sjetimo se da su težine ireducibilne reprezentacije V međusobno kongruentne mod Λ_R. Neka je zatim β proizvoljna težina od V i γ iz Λ_R takav da postoji vektor najveće težine v od V iz potprostora $V_{\beta+\gamma}$. Iz činjenice da je v u jezgri djelovanja svih pozitivnih korijenskih potprostora slijedi da je $l(\beta+\gamma)$ maksimalna vrijednost od l na skupu težina. Nadalje, injektivnost od l na Λ_R povlači injektivnost od l na cijelom skupu težina, što znači da je svaki vektor najveće težine nužno iz potprostora $V_{\beta+\gamma}$. Kao i ranije, težinski potprostor za težinu $\beta+\gamma$ u prostoru $W < V$ je jednodimenzionalan, ali zbog ireducibilnosti od V imamo $W = V$, zato je i $\dim V_{\beta+\gamma} = 1$. □

Pozitivni korijen zovemo prostim ako ga ne možemo izraziti kao sumu dvaju pozitivnih korijena. Negativni korijen zovemo prostim ako ga ne možemo izraziti kao sumu dvaju negativnih korijena.

Tvrdnja (ii) gornje propozicije povlači da je svaka ireducibilna reprezentacija V generirana slikama uzastopnih djelovanja negativnih korijenskih potprostora na (jedinstveni) vektor najveće težine. Nije teško pokazati da je $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \neq \{0\}$ kad god su α, β i $\alpha + \beta$ korijeni. Odatle odmah slijedi da je dovoljno djelovati korijenskim potprostorima koji odgovaraju prostim negativnim korijenima.

Može se pokazati da je skup prostih pozitivnih korijena nezavisan nad $\mathbb{C}$. Budući da korijeni razapinju cijeli $\mathfrak{h}^*$, prosti pozitivni korijeni čine bazu za $\mathfrak{h}^*$. Njihova slika po izomorfizmu određenom Killingovom formom je podskup skupa kokorijena koji je baza za $\mathfrak{h}$. Njoj dualnu bazu od $\mathfrak{h}^*$ označimo sa $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Za nju vrijedi da se svaki element rešetke Λ_W (pa tako i svaka težina) može prikazati kao cjelobrojna linearna kombinacija njezinih elemenata. (Naime, svaki je funkcional neka linearna kombinacija vektora ω_i. Kad obje strane jednakosti djeluju na proizvoljan kokorijen H_i, dobivamo da je koeficijent uz ω_i iz $\mathbb{Z}$.) Prema tome, rešetku težina Λ_W čine $\mathbb{Z}$-linearne kombinacije vektora ω_i. Posebno je rešetka korijena Λ_R rešetka nekih cjelobrojnih višekratnika od ω_i. Direktna posljedica toga je da je $[\Lambda_W : \Lambda_R]$ konačan.
Neka je sada α neka najveća težina od $\mathfrak{g}$ s obzirom na zadani uređaj na skupu korijena. Iz činjenice da je $\alpha(H_\gamma) \geq 0$ za sve pozitivne korijene γ slijedi da je svaka najveća težina prikaziva kao nenegativna cjelobrojna linearna kombinacija funkcionala ω_i, gdje je $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ baza za $\mathfrak{h}^*$ kao gore.
Ireducibilnu reprezentaciju s najvećom težinom $a_1\omega_1 + \ldots + a_n\omega_1$ označavamo sa $\Gamma_{a_1,\ldots,a_n}$.

Skup $\mathcal{W}$ svih funkcionala γ u realnoj ljusci korijena koji s pozitivnim korijenima zatvaraju kut ne veći od pravog (s obzirom na Killingovu formu) naziva se Weylova komora. Sljedeći teorem navodimo bez dokaza.

Teorem 3.2.10. *Za svaki α u presjeku Weylove komore $\mathcal{W}$ s rešetkom težina Λ_W postoji jedinstvena ireducibilna konačno-dimenzionalna reprezentacija Γ_α od $\mathfrak{g}$ s najvećom težinom α. Time je dana bijekcija između $\mathcal{W} \cap \Lambda_W$ i skupa svih ireducibilnih reprezentacija od $\mathfrak{g}$. Težine od Γ_α su elementi od Λ_W kongruentni α mod Λ_R koji se nalaze u konveksnoj ljusci orbite od α po djelovanju Weylove grupe.*

3.3 Reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}$

U prvom poglavlju definirali smo simplektičku grupu $\mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}$ kao skup svih matrica A determinante 1 za koje vrijedi

$$Q(Av, Aw) = Q(v, w) \quad \text{za sve } v, w \in V, \tag{3.6}$$

gdje je Q fiksirana antisimetrična nedegenerirana bilinearna forma na $V = \mathbb{C}^{2n}$.

Dokažimo sada da je zahtjev da simplektičke matrice imaju determinantu 1 suvišan. Ranije smo pokazali da formu Q možemo shvatiti kao element od $\Lambda^2 V^*$ i da za $A \in Sp_{2n}\mathbb{C}$ vrijedi $\Lambda^2 A^*(Q) = Q$. Koristeći činjenicu da je Q nedegenerirana, može se pokazati da postoji baza $\{f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n\}$ za V^* u kojoj Q ima prikaz $Q = \sum_1^n f_i \wedge g_i$. Tada je n-ta potencija od Q (množenje u vanjskoj algebri od V) jednaka $Q^n = n! f_1 \wedge g_1 \wedge \ldots \wedge f_n \wedge g_n$. Također, iz (2.5) slijedi da je operator $\Lambda^{2n} A^* : \Lambda^{2n} V^* \to \Lambda^{2n} V^*$ množenje skalarom $\det A^*$. Budući da $\det A^*$ fiksira Q^n, zaključujemo $\det A = \det A^* = 1$.

Liejevu algebru $\mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}$ znamo da čine sve $2n \times 2n$ kompleksne matrice X koje zadovoljavaju

$$Q(Xv, w) + Q(v, Xw) = 0 \quad \text{za sve } v \text{ i } w \text{ iz } V. \tag{3.7}$$

Također, formu Q možemo reprezentirati nekom antisimetričnom regularnom $2n \times 2n$ matricom M u smislu

$$Q(v, w) = v^t \cdot M \cdot w \quad \text{za sve } v \text{ i } w \text{ iz } V.$$

Tada su (3.6) i (3.7) ekvivalentni sa

$$A^t \cdot M \cdot A = M,$$

odnosno

$$X^t M + MX = 0. \tag{3.8}$$

Za M odabiremo matricu $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$. Ako $X \in \mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}$ zapišemo u blok formi

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

tada iz (3.8) dobivamo

$$B = B^t,$$
$$C = C^t$$

i

$$A = -D^t.$$

Slijedi da je dimenzija od $\mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C} = 2n^2 + n$. Promotrimo podalgebru $\mathfrak{h}$ od $\mathfrak{sp}_4\mathbb{C}$ razapetu dijagonalnim matricama $H_i = E_{i,i},\ i = 1, \ldots, n$, gdje je $E_{i,j}$ $2n \times 2n$ matrica koja na (i, j)– om mjestu ima 1, a na svim drugim mjestima 0. Označimo sa $\{L_1, \ldots, L_n\}$ odgovarajuću dualnu bazu za $\mathfrak{h}^*$. Očito je $\mathfrak{h}$ komutativna podalgebra. Pokažimo da se adjungirano djelovanje $\mathfrak{h}$ na $\mathfrak{g}$ dijagonalizira. Neka je $1 \leq i, j \leq n$. Stavimo najprije

$$X_{i,j} = E_{i,j} - E_{n+j,n+i} \in \mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}.$$

Imamo

$$\begin{aligned}
&[H_i, X_{i,j}] = X_{i,j}\\
&[H_j, X_{i,j}] = -X_{i,j}\\
&\text{i}\\
&[H_k, X_{i,j}] = 0 \text{ za sve ostale } k.
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je $X_{i,j}$ svojstveni vektor za sve $H \in \mathfrak{h}$ sa svojstvenom vrijednosti L_i–L_j. Nadalje, za i, j takve da je $i \neq j$ definiramo elemente od $\mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
Y_{i,j} &= E_{i,n+j} + E_{j,n+i},\\
Z_{i,j} &= E_{n+i,j} + E_{n+j,i}.
\end{aligned}$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}
&[H_i, Y_{i,j}] = Y_{i,j},\\
&[H_j, Y_{i,j}] = Y_{i,j}\\
&\text{i}\\
&[H_k, Y_{i,j}] = 0 \text{ za sve ostale } k.
\end{aligned}$$

Također je

$$\begin{aligned}
&[H_i, Z_{i,j}] = -Z_{i,j},\\
&[H_j, Z_{i,j}] = -Z_{i,j}\\
&\text{i}\\
&[Z_k, Y_{i,j}] = 0 \text{ za sve ostale } k.
\end{aligned}$$

Prema tome, vektori $Y_{i,j}$ i $Z_{i,j}$ su svojstveni za djelovanje od $\mathfrak{h}$ sa svojstvenim vrijednostima $L_i + L_j$, odnosno $-L_i - L_j$. Slično dobivamo da su vektori $U_i = E_{i,n+i}$ i $V_i = E_{n+i,i}$ svojstveni za $\mathfrak{h}$ sa svojstvenim vrijednostima $2L_i$ i $-2L_i$. Sve zajedno, svojstvene vrijednosti za djelovanje od $\mathfrak{h}$ su $\pm L_i \pm L_j$, $1 \leq i, j \leq n$. Primijetimo da su sve svojstvene vrijednosti multipliciteta 1 i ima ih $4 \cdot \binom{n}{2} + 2n = 2n^2$. Kako je dimenzija od $\mathfrak{h}$ jednaka n, a dimenzija cijele Liejeve algebre $2n^2 + n$, zaključujemo da se elementi iz $\mathfrak{h}$ simultano dijagonaliziraju. Štoviše, svaka od gornjih svojstvenih vrijednosti je različita od 0, što znači da je $\mathfrak{h}$ maksimalna komutativna podalgebra. Drugim riječima, $\mathfrak{h}$ je Cartanova podalgebra.
Izračunajmo sada Killingovu formu: jednostavna je posljedica činjenice da su za sve H i H' iz $\mathfrak{h}$ operatori ad$H$ i adH' simultano dijagonalizabilni, jednakost $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(H) \circ (\mathrm{ad}(H')) = \sum \alpha(H)\alpha(H')$. Odatle za $H = \sum a_i H_i$ i $H' = \sum b_i H_i$ imamo

$$B(H, H') = \sum_{i \neq j}(a_i + a_j)(b_i + b_j) + 2\sum_i (2a_i)(2b_i) + \sum_{i \neq j}(a_i - a_j)(b_i - b_j)$$

gdje prva suma odgovara sumi po korijenima $\pm(L_i + L_j)$, druga sumi po korijenima $\pm 2L_i$, a treća sumi po korijenima $\pm(L_i - L_j)$. Gornji izraz možemo pojednostaviti u

$$B(H, H') = (4n + 4)\Big(\sum a_i b_i\Big).$$

Odredimo sada kokorijene u $\mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}$. Najprije promatramo komutator elemenata $X_{i,j}$ i $X_{j,i}$ koji odgovaraju svojstvenim vrijednostima $L_i - L_j$ i $L_j - L_i$. Direktan račun pokazuje

$$[X_{i,j}, X_{j,i}] = H_i - H_j.$$

Prema tome je $H_{L_i - L_j}$ jedinstveni višekratnik od $H_i - H_j$ koji na $X_{i,j}$ djeluje množenjem sa 2. Kako je

$$\begin{aligned}[H_i - H_j, X_{i,j}] &= ((L_i - L_j)(H_i - H_j)) \cdot X_{i,j} \\ &= 2X_{i,j}\,,\end{aligned}$$

zaključujemo $H_{L_i - L_j} = H_i - H_j$.
Sada promatramo vektore $Y_{i,j}$ i $Z_{i,j}$ koji odgovaraju svojstvenim vrijednostima $L_i + L_j$ i $-L_i - L_j$. Dobivamo

$$[Y_{i,j}, Z_{i,j}] = H_i + H_j.$$

Kao i ranije imamo
$$[H_i + H_j, Y_{i,j}] = 2Y_{i,j},$$
što povlači
$$H_{L_i+L_j} = H_i \ + \ H_j.$$
Analognim postupkom dobivamo da vrijedi
$$\begin{aligned} H_{-L_i-L_j} &= -H_i - H_j, \\ H_{2L_i} &= H_i \end{aligned}$$
i
$$H_{-2L_i} = -H_i.$$
Sve zajedno, skup kokorijena jednak je skupu $\{\pm H_i \pm H_j, \pm H_i\}$.

Odredimo sada uređaj na skupu korijena.
Izaberimo funkcional l tako da vrijedi $l(L_1) > l(L_2) > \ldots > l(L_n) > 0$. Pozitivni korijeni su tada
$$R^+ = \{L_i + L_j\}_{i \leq j} \cup \{L_i - L_j\}_{i<j},$$
prosti pozitivni korijeni su $\{L_i - L_{i+1}\}_{i=1,\ldots,n-1}$ i $2L_n$, a prosti pozitivni kokorijeni su $\{H_i - H_{i+1}\}_{i=1,\ldots,n-1}$ i $2H_n$. Skup fundamentalnih težina je dualan skupu pozitivnih korijena. U ovom slučaju to je
$$\{\sum_{i=1}^{k} L_i : k = 1, \ldots, n\}.$$
Rešetka težina Λ_W je rešetka fundamentalnih težina i lako se vidi da je jedini netrivijalan element grupe Λ_W/Λ_R klasa $L_n + \Lambda_R$, odnosno skup svih cjelobrojnih linearnih kombinacija L_i - eva s neparnim brojem neparnih koeficijenata.

Odredimo Weylovu grupu W za $\mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}$. Refleksija s obzirom na hiperravninu Ω_{2L_i} funkcional L_i šalje u $-L_i$, a ostale L_j fiksira. Zatim, neka je $W_{i,j}$ operator na $\mathfrak{h}^*$ zadan tako da zamjenjuje funkcionale L_i i L_j, a ostale L_k fiksira. Tada je $W_{i,j}$ refleksija s obzirom na hiperravninu $\Omega_{L_i - L_j}$. Naime, očito $W_{i,j}$ mijenja predznak od $L_i - L_j$. A ako je $L \in \Omega_{L_i - L_j}$ proizvoljan, to jest vrijedi $L(H_i - H_j) = 0$ i ako je $L = \sum_{s=1}^{n} a_s L_s$ prikaz od L u bazi $\{L_1, \ldots, L_n\}$ tada iz uvjeta $L(H_i) = L(H_j)$ slijedi

$$L = a_i (L_i + L_j) + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i,j}}^{n} a_s L_s .$$

Djelovanjem sa $W_{i,j}$ na obje strane jednakosti dobivamo $W_{i,j}(L) = L$.
Opisane refleksije su dovoljne da generiraju cijelu Weylovu grupu za $\mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}$. Primijetimo da refleksije prve vrste čine grupu izomorfnu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, dok refleksije druge vrste čine grupu izomorfnu simetričnoj grupi reda n. Također, primijetimo da im je presjek trivijalan i da je grupa izomorfna sa $\mathfrak{S}_n$ normalna. Odatle slijedi da je W semidirektan produkt grupa $\mathfrak{S}_n$ i $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. Posebno, red joj je $2^n n!$. U slučaju $n = 2$, Weylova grupa za $\mathfrak{sp}_4\mathbb{C}$ je diedralna grupa D_4.

3.4 Reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{sp}_4\mathbb{C}$

Kad primijenimo rezultate dokazane za općenit slučaj Liejeve algebre $\mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}$, imamo da su korijeni od $\mathfrak{sp}_4\mathbb{C}$ funkcionali $\pm(L_1 + L_2)$, $\pm(L_1 - L_2)$, $\pm 2L_1$ i $\pm 2L_2$. Primitivni pozitivni korijeni su $L_1 - L_2$ i $2L_2$. Nadalje, zatvorena Weylova komora je presjek poluravnina $\{L : B(2L_2, L) \geq 0\}$ i $\{L : B(L_1 - L_2, L)\} \geq 0$, gdje je B Killingova forma na $\mathfrak{h}^*$. Realna ljuska korijena $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ je dvodimenzionalan realni prostor pa ako u koordinatnoj ravnini označimo L_1 i L_2 kao jedinice na x i y-osi, Weylova komora je upravo prvi oktant.

Iz općenitog slučaja Liejeve algebre $\mathfrak{sp}_4\mathbb{C}$ vidimo da su fundamentalne težine funkcionali L_1 i $L_1 + L_2$. Tako ireducibilnu reprezentaciju s najvećom težinom $aL_1 + b(L_1 + L_2)$ označavamo $\Gamma_{a,b}$.

Prvi primjer reprezentacije od $\mathfrak{sp}_4\mathbb{C}$ je standardna reprezentacija na prostoru $V = \mathbb{C}^4$. Lako se vidi da su vektori kanonske baze ujedno i svojstveni za matrice H_1 i H_2 sa svojstvenim vrijednostima $L_1, L_2, -L_1$ i $-L_2$. Uzimajući u obzir uređaj na skupu korijena, nalazimo da je e_1 vektor najveće težine. Kad na e_1 uzastopce djelujemo vektorima iz negativnih korijenskih potprostora, dobivamo sve težinske vektore. Odatle slijedi da je V ireducibilna reprezentacija s najvećom težinom L_1, to jest $\Gamma_{1,0}$.
Općenito vrijedi da su težine dualne reprezentacije Liejeve algebre negativne težine originalne reprezentacije π na vektorskom prostoru V. Naime, neka je $\{E_1^*, \ldots, E_n^*\}$ dualna baza bazi $\{E_1, \ldots, E_n\}$ za V u kojoj se $\mathfrak{h}$ dijagonalizira i neka su $L_1, \ldots, L_n$ pripadne težine (ne

nužno različite). Za $H \in \mathfrak{h}$ imamo

$$\pi^*(H)(E_i^*)(E_j) = -E_i^*(\pi(H)(E_j)) = -L_j(H)\delta_{i,j} .$$

Dakle, E_i^* je težinski vektor za $\mathfrak{h}$ s težinom $-L_i$. Prema tome, težine od V^* su iste kao i težine od V i sa istim multiplicitetima. Posebno V i V^* imaju istu najveću težinu pa zaključujemo da su reprezentacije V i V^* izomorfne.
Sljedeću reprezentaciju koju promatramo je $\Lambda^2 V$. Znamo da bazu za $\Lambda^2 V$ čine vektori $e_i \wedge e_j$ kad indeksi i, j idu po svim dvočlanim podskupovima skupa $\{1, \dots, 4\}$. Iz formule

$$X.(v \wedge w) = X.v \wedge w + v \wedge X.w, \quad \text{za svaki } X \text{ iz } \mathfrak{sp}_4\mathbb{C} \quad \text{i sve } v \text{ i } w \text{ iz } V$$

zaključujemo da su vektori $e_i \wedge e_j$ težinski i težine su svi funkcionali oblika $\pm L_i \pm L_j$ za i, j kao gore. Dakle, ima ih šest, a najveća je $L_1 + L_2$. To slijedi iz definicije vektora najveće težine. Nadalje, sve su težine multipliciteta 1 osim nul-funkcionala kojem odogovaraju težinski vektori $e_1 \wedge e_3$ i $e_2 \wedge e_4$.
U poglavlju Liejeve algebre smo dokazali da inducirano djelovanje grupe $Sp_4\mathbb{C}$ na prostoru $\Lambda^2 V^* \cong \Lambda^2 V$ djeluje kao identiteta na pravcu razapetom s formom Q, gdje je Q antisimetrična forma na V invarijantna na djelovanje simplektičkih matrica. A to znači da $\Lambda^2 V$ nije ireducibilna reprezentacija od $Sp_4\mathbb{C}$ jer sadrži jednodimenzionalan invarijantan potprostor. Prema Napomeni 2.0.3 $\Lambda^2 V$ nije ireducibilna ni kao reprezentacija od $\mathfrak{sp}_4\mathbb{C}$. Može se provjeriti da djelujući negativnim korijenskim potprostorima na vektor najveće težine, dobivamo sve težinske vektore za nenul-težine.
Sjetimo se da isti potprostor W generiraju vektori koje dobijemo kad na vektor najveće težine djelujemo korijenskim potprostorima koji odgovaraju samo prostim negativnim korijenima. A od najveće težine do nul-težine na opisani način možemo doći samo jednim putem, i to od $L_1 + L_2$ do $L_1 - L_2$ primjenom $\mathfrak{g}_{-2L_2}$ i od $L_1 - L_2$ do 0 primjenom $\mathfrak{g}_{L_1 - L_2}$ te je rezultat nenul-vektor. Odatle zaključujemo da je $\Lambda^2 V$ direktna suma ireducibilne podreprezentacije W i jednodimenzionalne reprezentacije $\mathbb{C}$. Reprezentacija W je dimenzije pet s istim težinama kao i $\Lambda^2 V$ i svim multiplicitetima jednakim 1, dakle izomorfna $\Gamma_{0,1}$. A budući da je težinski potprostor za težinu 0 od V dvodimenzionalan, a od W jednodimezionalan, jedina težina od $\mathbb{C}$ je 0. (To znamo i iz opće teorije - da svaka jednodimezionalna reprezentacija poluproste Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ ima težinu 0. Naime, znamo da to vrijedi za Liejevu algebru $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$, ali onda vrijedi i za podalgebre $\mathfrak{s}_\alpha$ u $\mathfrak{g}$. A budući da kokorijeni $\{H_\alpha\}$ razapinju Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$, imamo da se težina poništava na cijelom $\mathfrak{h}$.)

Sljedeća reprezentacija koju promatramo je $\mathrm{Sym}^2 V$.
Slično kao u prethodnom slučaju dobivamo da su težine od $\mathrm{Sym}^2 V$ jednake $\pm L_i \pm L_j$. Dakle, iste su kao i za adjungiranu reprezentaciju, i to s istim multiplicitetima. Iz toga i činjenice

da je adjungirana reprezentacija ireducibilna ($\mathfrak{sp}_4\mathbb{C}$ je prosta Liejeva algebra) zaključujemo da je i $\mathrm{Sym}^2 V$ ireducibilna i izomorfna $\Gamma_{2,0}$.
Sjetimo se da smo Liejevu algebru $\mathfrak{sp}_4\mathbb{C}$ identificirali sa $\mathrm{Sym}^2 V$. Napomenimo da je izomorfizam (2.2) koji ostvaruje tu identifikaciju upravo (prema Schurovoj lemi do na množenje skalarom jedinstveni) operator preplitanja između adjungirane reprezentacije i $\mathrm{Sym}^2 V$.
Promatrajmo sada reprezentaciju $\mathrm{Sym}^2 W$. Kao i ranije, kombinatorno se pokazuje da su sve težine multipliciteta 1 osim nul-težine, koja je multipliciteta 3. Najveća težina je dva puta najveća težina od W, a to je $2L_1 + 2L_2$. Da bismo vidjeli je li reprezentacija ireducibilna možemo pokušati odrediti koliko nezavisnih težinskih vektora za težinu 0 dobivamo djelujući na vektor najveće težine prostim negativnim korijenskim potprostorima. Izlazi da slike djelovanja razapinju dvodimenzionalni prostor, što znači da reprezentacija nije ireducibilna.

Alternativno, promatrajmo prirodno preslikavanje dano vanjskim produktom

$$\Lambda^2 V \otimes \Lambda^2 V \to \Lambda^4 V \cong \mathbb{C}.$$

Preslikavanje je simetrično pa se može faktorizirati do (prirodnog) preslikavanja

$$\mathrm{Sym}^2(\Lambda^2 V) \to \mathbb{C}.$$

Označimo sa v_1, v_2, w_1 i w_2 redom težinske vektore težina $L_1, L_2, -L_1$ i $-L_2$. Tada su vektori $v_1 \wedge v_2$ i $w_1 \wedge w_2$ iz W pa je njihov produkt iz $\mathrm{Sym}^2 W$. Slika tog vektora po gornjem preslikavanju je $v_1 \wedge v_2 \wedge w_1 \wedge w_2$, a to je različito od 0. Prema tome, restrikcija

$$\varphi : \mathrm{Sym}^2 W \to \mathbb{C}$$

je surjekcija. Budući da je φ operator preplitanja, jezgra i slika od φ su podreprezentacije od $\mathrm{Sym}^2 W$. Pa u slučaju da $\ker \varphi$ nije ireducibilna, onda je suma ireducibilne i jednodimenzionalne. Kako je slika od φ također jednodimenzionalna reprezentacija, to bi značilo da simplektička grupa $Sp_4\mathbb{C}$ ima dvije invarijantne simetrične bilinearne forme na W. No to je u kontradikciji s tim da je W ireducibilna reprezentacija proste algebre $\mathfrak{sp}_4\mathbb{C}$. Na kraju zaključujemo

$$\mathrm{Sym}^2 W = \Gamma_{0,2} \oplus \mathbb{C}.$$

Sada analiziramo tenzorski produkt $V \otimes W$.
Sve su težine multipliciteta 1 osim težina $\pm L_i$, koje su multipliciteta 3. Najveća težina je $2L_1 + (L_1 + L_2)$ pa vidimo da $V \otimes W$ sadrži ireducibilnu reprezentaciju $\Gamma_{1,1}$. Iz najveće

težine primjenjujući proste negativne korijenske potprostore do težina $\pm L_i$ možemo doći na dva različita načina. Na primjer, do težine L_1 na jedan način dolazimo naprije djelujući sa $\mathfrak{g}_{L_2-L_1}$, a onda sa $\mathfrak{g}_{-2L_2}$, a na drugi način primjenom istih potprostora samo obrnutim redoslijedom. Odatle zaključujemo da su ireducibilni faktori od $V \otimes W$ reprezentacija $\Gamma_{1,1}$ i barem jedna kopija standardne reprezentacije V. Ako sa v označimo vektor najveće težine od $\Gamma_{1,1}$, direktan račun pokazuje da su vektori $X_{2,1}V_2.v$ i $V_2X_{2,1}.v$ nezavisni, što znači da $V \otimes W$ sadrži točno jednu kopiju standardne reprezentacije.
Prema tome je

$$V \otimes W = \Gamma_{1,1} \oplus V.$$

Za kraj, analizirajmo reprezentaciju $\Gamma_{2,1}$. U tu svrhu gledamo što jednostavniju reprezentaciju koja je sadrži, npr. $\mathrm{Sym}^2 V \otimes W$.
Težine od $\mathrm{Sym}^2 V \otimes W$ koje se nalaze u prvom oktantu su $0, L_1+L_2, 2L_1, 2L_1+2L_2$ i $3L_1+L_2$ sa multiplicitetima redom $6, 5, 3, 1$ i 1. Primijetimo da od vektora najveće težine u $\Gamma_{2,1}$ do težinskog potprostora $(\Gamma_{2,1})_{2L_1}$ možemo doći na dva načina: najprije djelujući sa $\mathfrak{g}_{L_2-L_1}$, onda sa $\mathfrak{g}_{-2L_2}$, i obratno. To znači da je multiplicitet težine $2L_1$ u $\Gamma_{2,1}$ najviše 2 i da je jedan od ireducibilnih faktora od $\mathrm{Sym}^2 V \otimes W$ neka od reprezentacija $\Gamma_{a,b}$ s težinom $2L_1$. Najveće težine od $\Gamma_{a,b}$ za a ili b veće ili jednake 3 nisu težine od $\mathrm{Sym}^2 V \otimes W$ pa takve reprezentacije ne mogu biti sadržane u $\mathrm{Sym}^2 V \otimes W$. Nije sadržana ni $\Gamma_{0,2}$ jer joj je težina $2(L_1+L_2)$ multipliciteta 2. Znajući multiplicitete težina od $\Gamma_{2,0} = \mathrm{Sym}^2 V$, zaključujemo da je $\mathrm{Sym}^2 V \otimes W$ sadržava.
Nadalje, težine $2L_1$ i L_1+L_2 u $\Gamma_{2,1}$ ne mogu biti istovremeno multipliciteta 1. U protivnom bi $\mathrm{Sym}^2 V \otimes W$ sadržavala dvije kopije od $\mathrm{Sym}^2 V$, pa onda i dvije kopije od W. Naime, težina $L_1 + L_2$ nastupa u $\mathrm{Sym}^2 V$ s multiplicitetom 1, a jedini mogući ireducibilni faktor od $\mathrm{Sym}^2 V \otimes W$ s tom težinom je $\Gamma_{0,1}$. Znajući multiplicitet nul-težine obiju reprezentacija (redom 2 i 1), zaključujemo da bi njezin multiplicitet u $\mathrm{Sym}^2 V \otimes W$ trebao biti barem 7, što nije. Slično, težine $2L_1$ i L_1+L_2 ne mogu istoremeno nastupiti u $\Gamma_{2,1}$ s multiplicitetima 1 i 2. U protivnom bi $\mathrm{Sym}^2 V \otimes W$ sadržavala dvije kopije od $\mathrm{Sym}^2 V$ i jednu od W. Nula je težina ireducibilne reprezentacije $\Gamma_{2,1}$ pa je maksimalnog multipliciteta, dakle barem 2. Odatle bi opet multiplicitet nul-težine u $\mathrm{Sym}^2 V \otimes W$ trebao biti barem 7. Dakle, $\mathrm{Sym}^2 V \otimes W$ sadržava točno jednu kopiju od $\mathrm{Sym}^2 V$ i barem jednu kopiju od W budući da je $L_1 + L_2$ težina multipliciteta 5 u $\mathrm{Sym}^2 V \otimes W$, a najviše 3 u $\Gamma_{2,1}$ (slijedi iz $L_1 + L_2 = 2(L_2 - L_1) + (-2L_2)$).
Prema tome imamo dvije mogućnosti za težine od $\Gamma_{2,1}$: ili su multipliciteti težina $L_1 + L_2$ i 0 u $\Gamma_{2,1}$ jednaki 3 i tada je

$$\mathrm{Sym}^2 V \otimes W = \Gamma_{2,1} \oplus \mathrm{Sym}^2 V \oplus W;$$

ili su multipliciteti od $L_1 + L_2$ i 0 u $\Gamma_{2,1}$ jednaki 2 pa imamo

$$\mathrm{Sym}^2 V \otimes W = \Gamma_{2,1} \oplus \mathrm{Sym}^2 V \oplus W \oplus W.$$

Direktnim se računom pokazuje da slike djelovanja $(X_{2,1})^2 V_2.v$, $X_{2,1}V_2X_{2,1}.v$ i $V_2(X_{2,1})^2.v$ čine bazu za $(\Gamma_{2,1})_0$, gdje su $X_{2,1}$ i V_2 svojstveni vektori za proste negativne korijene $L_2 - L_1$ i $-2L_2$ i v vektor najveće težine u $\Gamma_{2,1}$. Prema tome, vidimo da nastupa prva mogućnost.

Bibliografija

[1] Nicolas Bourbaki, *Lie groups and Lie algebras: chapters 7-9*, sv. 7, Springer Science & Business Media, 2008.

[2] Theodor Bröcker i Tammo tom Dieck, *Representations of compact Lie groups*, sv. 98, Springer Science & Business Media, 2013.

[3] William Fulton i Joe Harris, *Representation theory*, sv. 129, Springer Science & Business Media, 1991.

[4] Werner Hildbert Greub, *Multilinear Algebra. Greub*, Springer-Verlag, 1967.

[5] Brian Hall, *Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction*, sv. 222, Springer, 2015.

[6] Peter J Hilton i Urs Stammbach, *A course in homological algebra*, sv. 4, Springer Science & Business Media, 2012.

[7] James E Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, sv. 9, Springer Science & Business Media, 1972.

[8] Max Neunhoffer, *Lie Algebras*, Semester 2, Academic Year 2008-09 (kolovoz 2015), `http://www.math.rwth-aachen.de/~Max.Neunhoeffer/Teaching/liealg/liealg.pdf`.

[9] Nicolas Perrin, *Semisimple Lie algebras*, Hausdorff Center for Mathematics,University of Bonn (kolovoz 2015), `http://relaunch.hcm.uni-bonn.de/fileadmin/perrin/chap8.pdf`.

[10] Willie Wong, *Why is the determinant of a symplectic matrix 1*, Mathematics Stack Exchange (kolovoz 2015), `http://math.stackexchange.com/questions/242091/why-is-the-determinant-of-a-symplectic-matrix-1`.

Sažetak

U ovom smo radu izložili osnovne činjenice o strukturi i reprezentacijama poluprostih Liejevih algebri i dali primjere nekih reprezentacija simplektičke algebre ranga 2.
Najprije smo definirali Liejeve grupe, zatim njihove Liejeve algebre i eksponencijalno preslikavanje pomoću kojeg je opravdano proučavanje reprezentacija Liejevih grupa u terminima reprezentacija njihovih Liejevih algebri.
Dali smo grubu klasifikaciju Liejevih algebri i dokazali nekoliko ekvivalentnih karakterizacija kompleksnih poluprostih Liejevih algebri. Detaljno je obrađen slučaj algebre $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ i pokazano poslije kako se ona ugrađuje u strukturu proizvoljne kompleksne poluproste algebre $\mathfrak{g}$.
Prezentirali smo između ostalog dokaz egzistencije Cartanove podalgebre, definirali skup korijena i rešetku težina. Uveli smo pojam najveće težine i naposlijetku spomenuli fundamentalan rezultat o klasifikaciji ireducibilnih konačnodimenzionalnih reprezentacija od $\mathfrak{g}$.
Zatim smo razvijenu opću teoriju primijenili na konkretan primjer simplektičkih algebri, točnije na algebru $\mathfrak{sp}_2\mathbb{C}$.

Summary

In this thesis we exhibited basic facts about the structure and representations of semisimple Lie algebras and gave examples of some representations of the symplectic algebra of rank 2.
First we defined Lie groups, followed by their Lie algebras and the exponential mapping. We showed how to use the exponential mapping to study Lie groups representations in terms of representations of their Lie algebras.
We then gave a rough classification of Lie algebras and proved several equivalent characterizations of semisimple complex Lie algebras. The case of the algebra $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ was treated in detail and it was shown later how representation theory of $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ incorporates into the structure of an arbitrary complex semisimple algebra $\mathfrak{g}$.
We presented among other things a proof of the existence of Cartan subalgebras and defined the set of roots and the weight lattice. We introduced the notion of the highest weight and finally mentioned the fundamental result on the classification of irreducible finite-dimensional representations of $\mathfrak{g}$.
We then applied the general theory to the concrete example of the symplectic algebras, more precisely the algebra $\mathfrak{sp}_2\mathbb{C}$.

Životopis

Rođen sam 12. svibnja 1991. godine u Karlovcu. U istom gradu 1998. upisujem osnovnu školu. Prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Karlovcu pohađam od 2006. do 2010., kada sa prvom generacijom pišem državnu maturu. Iste godine upisujem Preddiplomski sveučilišni studij matematike na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu, a tri godine kasnije Diplomski studij Teorijske matematike na istom odsjeku.